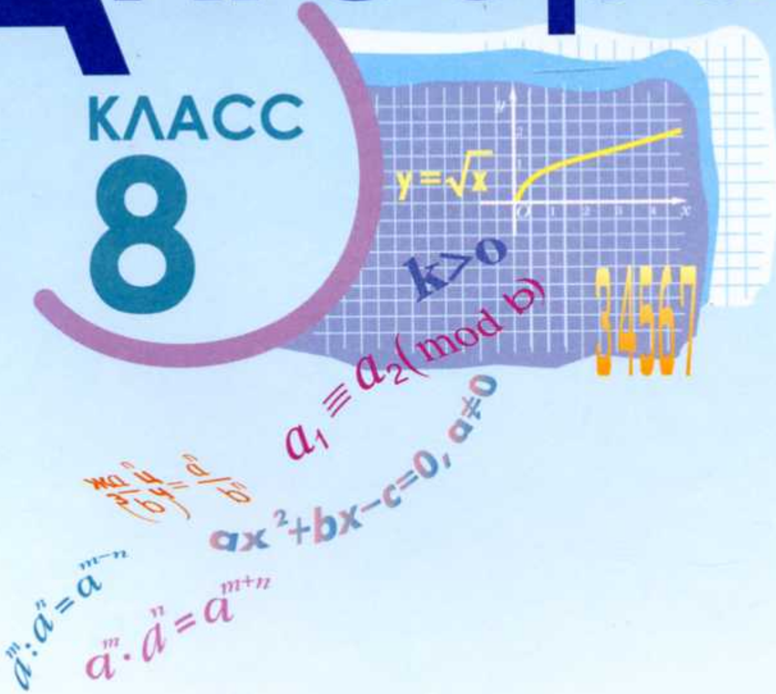
Алгебра

КЛАСС

8



УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

Алгебра
8 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Углублённый уровень

Москва
«Просвещение»
2018

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

6+

Авторы:
Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Феоктистов

На учебное пособие получены **положительные экспертные заключения** по результатам **научной** (заключение РАО № 1139 от 19.11.16), **педагогической** (заключение РАО № 1030 от 21.11.16) и **общественной** (заключение РКС № 350-ОЭ от 19.12.16) экспертиз

Алгебра. 8 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организа-
А45 ций : углубл. уровень / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков и др.]. — М. : Просвещение, 2018. — 351 с. : ил. — ISBN 978-5-09-051123-0.

Данное учебное пособие предназначено для углублённого изучения алгебры в 8 классе. Это второе пособие завершённой линии учебных пособий по алгебре для 7—9 классов, подготовленных в соответствии со всеми требованиями Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования. Особенностями этого пособия являются расширение и углубление традиционных учебных тем за счёт теоретико-множественной, вероятностно-статистической и историко-культурной линий. Оно содержит большое количество разнообразных по тематике и уровню сложности упражнений.

Главы 1, 6, 7 написаны Ю. Н. Макарычевым; главы 2, 5, а также § 7, 8 — Н. Г. Миндюк; глава 4, а также § 6 — К. И. Нешковым; доработка некоторых тем и ряда упражнений выполнена И. Е. Феоктистовым.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-051123-0

Предисловие для учащихся

Дорогие восьмиклассники! В этом году вы продолжите изучение курса алгебры. Вам предстоит познакомиться с рациональными выражениями, научиться решать квадратные и дробно-рациональные уравнения, линейные неравенства и их системы. На уроках вы будете не только строить графики функций, но и выполнять их преобразования — сдвиг, симметрию относительно прямой и относительно точки. Вы узнаете об иррациональных числах, об арифметических квадратных корнях и их свойствах, о степени с отрицательным показателем и о многом другом. Всё это поможет вам при изучении геометрии, физики, химии и других школьных предметов.

Данное учебное пособие предназначено для углублённого изучения алгебры. Вам нужно будет внимательно читать объяснительные тексты, выполнять различные упражнения, среди которых немало задач на смекалку. Проблемные, исследовательские задачи отмечены особым образом — их номер дан другим цветом. После прочтения каждого параграфа очень полезно отвечать на контрольные вопросы. В этом учебном году вам предстоит узнать много нового, полезного и интересного, приобрести важные навыки в работе с алгебраическими выражениями, уравнениями, неравенствами, функциями. Всё это необходимо для успешного обучения в школе, для сдачи экзамена по алгебре за курс основной школы в 9 классе, но не только для этого. Те мыслительные операции, которым вы научитесь на уроках алгебры, будут помогать успешно изучать и другие учебные дисциплины. Как сказал великий русский учёный М. В. Ломоносов, «математику уже затем изучать следует, что она ум в порядок приводит».

Авторы надеются, что работа с этим пособием будет для вас интересной и полезной, позволит увидеть алгебру не только как учебный школьный предмет, но и как средство самовоспитания, развития своих способностей, поможет рассматривать математику как часть общечеловеческой культуры.

Внутри текста используются следующие обозначения:

— формулировки определений и теорем

— выделение правил и свойств

— выделение важного материала

— порядок действий, алгоритм

Глава 1 Дроби

В этой главе рассказывается о числовых дробях и дробях, содержащих переменные. Рассматриваются свойства дробей, области допустимых значений переменных, входящих в дробь или дробное выражение. Так же как с числовыми дробями, рассматриваются действия с алгебраическими дробями. Итогом изучения темы является формирование умения преобразовывать дробно-рациональные выражения.

§ 1. Дроби и их свойства

1. Числовые дроби и дроби, содержащие переменные

Дробью называют выражение вида $\frac{a}{b}$, где буквами обозначены числовые выражения или выражения, содержащие переменные. Выражение a называют *числителем* дроби $\frac{a}{b}$, а выражение b — её *знаменателем*.

Обозначение дроби в виде $\frac{a}{b}$ впервые появилось в «Книге абака» (1202) итальянского математика Леонардо Фибоначчи, а широкое распространение в Европе данная запись получила после появления работ французского математика Франсуа Виета.

Леонардо Фибоначчи (*Пизанский*) (1180—1240) — итальянский математик; в своём главном труде «Книга абака» (1202) впервые систематически изложил достижения арабской математики; ввёл в рассмотрение первую возвратную последовательность чисел — так называемый ряд Фибоначчи.

Примерами числовых дробей являются выражения:

$$\frac{2}{7},\quad \frac{3{,}5+2{,}3\cdot 5}{-8},\quad \frac{1{,}6}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}.$$

Примерами дробей с переменными являются выражения:

$$\frac{3}{x},\quad \frac{y^2-y+12}{y+8},\quad \frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{m-n}.$$

Чтобы найти значение дроби, надо найти значение её числителя и значение знаменателя и первый результат разделить на второй.

Найдём, например, значение дроби $\frac{48{,}2+21{,}8}{15{,}6-3{,}2\cdot 4}$:

$$\frac{48{,}2+21{,}8}{15{,}6-3{,}2\cdot 4}=\frac{70}{15{,}6-12{,}8}=\frac{70}{2{,}8}=\frac{700}{28}=\frac{100}{4}=25.$$

Если окажется, что знаменатель дроби равен нулю, то такая *дробь не имеет смысла*.

Например, дробь $\frac{10}{14-2\cdot 7}$ не имеет смысла, так как её знаменатель $14-2\cdot 7$ равен 0, а делить на нуль нельзя.

Значение дроби, содержащей переменные, зависит от значений этих переменных.

Например, дробь $\frac{x+5}{x-3}$ при $x=2$ принимает значение, равное −7, при $x=8$ значение дроби равно 2,6. При $x=3$ дробь *не имеет смысла*, так как при этом значении x она обращается в числовую дробь, знаменатель которой равен 0.

Число 3 — единственное значение x, при котором дробь $\frac{x+5}{x-3}$ не имеет смысла. При всех остальных значениях x дробь имеет определённое значение. Говорят, что числа, отличные от 3, — *допустимые значения переменной* x, а множество всех чисел, отличных от 3, называют *областью допустимых значений переменной в выражении* $\frac{x+5}{x-3}$.

Для дроби $\frac{x+y}{x-y}$, которая содержит две переменные, допустимыми значениями являются все пары чисел $(x;\ y)$, в которых $x \neq y$.

Для дроби $\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$ допустимыми значениями являются все числа, у которых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $a \neq b$.

Заметим, что для таких выражений, как $\frac{1}{x-x}$, множество допустимых значений переменной x — пустое множество. Они не имеют смысла при любых значениях переменных, и мы исключаем их из дальнейшего рассмотрения.

Пример 1. Найдём допустимые значения переменной для дроби $\frac{x}{x^2 - 25}$.

Допустимыми значениями переменной для этой дроби являются значения x, при которых знаменатель $x^2 - 25$ отличен от нуля. Чтобы их найти, надо решить уравнение $x^2 - 25 = 0$.

Для решения уравнения $x^2 - 25 = 0$ разложим его левую часть на множители. Получим: $(x - 5)(x + 5) = 0$.

Отсюда $x = 5$ или $x = -5$.

Значит, для дроби $\frac{x}{x^2 - 25}$ допустимыми значениями переменной являются все числа, отличные от -5 и 5.

Пример 2. Найдём множество целых чисел, при которых дробь $\frac{13}{n+3}$ принимает целые значения.

Число 13 — простое. Поэтому оно имеет четыре целых делителя: -13; -1; 1; 13. Значит, знаменателем дроби может быть число -13; -1; 1 или 13. Решив уравнения $n + 3 = -13$, $n + 3 = -1$, $n + 3 = 1$, $n + 3 = 13$, найдём множество целых чисел, при которых данная дробь принимает целые значения.

Ответ: $\{-16; -4; -2; 10\}$.

Пример 3. Докажем тождество:

$$\frac{c^3 - 5c + 2}{c^2 + 2c - 1} = c - 2.$$

Так как черта дроби представляет собой знак деления, то для доказательства тождества воспользуемся определением частного: частным от деления числа a на число b $(b \neq 0)$ называется такое число k, что $a = bk$. Значит, для доказательства тождества достаточно показать, что при любых значениях c верно равенство:

$$(c^2 + 2c - 1)(c - 2) = c^3 - 5c + 2.$$

Имеем:

$$(c^2 + 2c - 1)(c - 2) = c^3 + 2c^2 - c - 2c^2 - 4c + 2 = c^3 - 5c + 2.$$

Тождество доказано.

В этой главе мы будем заниматься преобразованиями *рациональных выражений*.

Рациональными выражениями называют выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень.

Рациональные выражения делятся на два класса: *целые* и *дробные*.

Целым называется рациональное выражение, которое не содержит операции деления на выражение с переменными.

<u>Дробным</u> называется рациональное выражение, которое не является целым, т. е. содержит операцию деления на выражение с переменными.

Например, выражения

$$\frac{4}{9}\cdot 75,\quad 5a^2,\quad x^2-7x+6,\quad (b+c)^2-b(b-2c),\quad \frac{y-7x}{15}\ —$$

целые рациональные выражения, а выражения

$$\frac{x}{x+y},\quad \frac{a+2}{a-8}+3,\quad \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{c}\ —$$

дробные рациональные выражения.

Заметим, что выражения $|x|$, $a-|2b|$ и вообще выражения, содержащие переменную под знаком модуля, не являются рациональными выражениями. В дальнейшем вы познакомитесь и с другими выражениями, которые не являются рациональными выражениями.

Следует обратить внимание на существенное различие в понятиях *дробь* и *дробное выражение*. Дробь может быть как дробным, так и целым выражением, а дробное выражение может и не быть дробью.

Например, $\frac{a}{5}$ и $\frac{5}{a}$ — это дроби. Но $\frac{a}{5}$ — целое выражение, а $\frac{5}{a}$ — дробное выражение. Выражение $(x+6):y$ не является дробью, но является дробным выражением.

Добавим, что дробь равна нулю тогда и только тогда, когда она имеет смысл, а её числитель равен нулю, т. е. $\frac{a}{b}=0$, если $a=0$ и $b\neq 0$.

Упражнения

1. Какие из выражений

$$\frac{x}{9},\quad 3\frac{1}{8},\quad \frac{7}{a+b},\quad \frac{1}{2}a,\quad \frac{x}{y}+2,\quad \frac{a^2-b^2}{ab}$$

являются дробями?

2. Представьте в виде дроби выражение:

а) $1\frac{2}{7}$; в) $-0,75$; д) $0,2x$; ж) $(a+b):3$;

б) $3\frac{2}{5}$; г) $0,37:1,11$; е) $2\frac{3}{7}y$; з) $(x-5):(y+5)$.

3. Какие из выражений

$$3a^2b^4,\quad \left(\frac{1}{3}x+y\right)\left(\frac{1}{3}x-y\right),\quad \frac{4a-b}{2a}+5,\quad \frac{|x|+1}{x^2-5},\quad \frac{x+2y}{10},$$

$$12xy-\frac{7}{8},\quad \frac{c}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}},\quad (x^2-8xy-y^2):x$$

являются целыми, а какие — дробными?

4. Запишите частное в виде дроби:

а) $5 : (x + 3)$;
б) $(y - 1) : (y^2 + 1)$;
в) $(a + 25) : 7$;
г) $(a^2 + a + 1) : (b^2 - b + 7)$.

5. Вычислите:

а) $\frac{239^2 - 187^2}{426}$;
б) $\frac{17^2 + 442 + 13^2}{30}$;
в) $\frac{3{,}7^2 + 6{,}3 \cdot 3{,}7}{111}$;
г) $\frac{8{,}3^2 - 83 \cdot 0{,}13}{0{,}7}$.

6. Найдите значение дроби $\frac{x^2 + 5x - 24}{x^2 + 5x - 6}$, если:

а) $x = 7$;
б) $x = 3$;
в) $x = 0$;
г) $x = -2$;
д) $x = 0{,}5$;
е) $x = 1{,}9$.

7. По какому признаку из множества обыкновенных дробей вида $\frac{1}{n}$, где $n \leqslant 20$, выделено подмножество:

а) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{14}, \frac{1}{16}, \frac{1}{18}, \frac{1}{20}\right\}$;

б) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \frac{1}{18}\right\}$;

в) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}\right\}$;

г) $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \frac{1}{16}, \frac{1}{19}\right\}$?

8. Запишите путём перечисления элементов множество:

$$A = \left\{ \frac{a}{15} \;\middle|\; a \in N,\ a < 15 \right\}.$$

Выделите из множества A подмножество:
а) несократимых дробей;
б) сократимых дробей.

9. Расстояние между пристанями 24 км. Моторная лодка имеет собственную скорость v км/ч, а скорость течения реки равна 2 км/ч. Сколько времени t затратит на весь путь моторная лодка, двигаясь против течения реки? Найдите t, если:
а) $v = 38$ км/ч;
б) $v = 18$ км/ч.

10. Вкладчик положил в банк a р. Через год его вклад увеличился на b р. Какой процент p от вклада начисляет банк ежегодно? Выразите переменную p через a и b. Найдите значение p, если:
а) $a = 200$, $b = 40$;
б) $a = 500$, $b = 30$.

11. При каких значениях переменной дробь имеет смысл:

а) $\frac{12}{x^2-81}$; б) $\frac{x^2+1}{x^2-9x+14}$; в) $\frac{x^2-25}{x^2+25}$; г) $\frac{1}{x-\frac{4}{x}}$?

12. Найдите допустимые значения переменной для дроби:

а) $\frac{3y}{|y|-1}$; в) $\frac{5y-10}{3}$; д) $\frac{18}{y^3-64y}$;

б) $\frac{2}{y^2-5|y|}$; г) $\frac{y}{y^2+2y-3}$; е) $\frac{2y-1}{(2y+1)^3-(8y+4)}$.

13. Найдите область допустимых значений переменных в выражении:

а) $\frac{4x^2-1}{4}$; б) $\frac{4}{4x^2-1}$; в) $\frac{2xy}{x^2-y^2}$; г) $\frac{x^2-y^2}{2xy}$.

14. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=-\frac{1}{x^2-x}$; в) $\alpha(x)=\frac{x-x^3}{3}$;

б) $g(x)=\frac{x^2-x}{1-x}$; г) $\beta(x)=\frac{2x-1}{2x^2-x-1}$.

15. Составьте дробное выражение с одной переменной, для которого допустимыми значениями являются:

а) все числа, кроме 5;
б) все числа, кроме −4 и 4;
в) все числа, кроме −1, 0 и 1;
г) все числа.

16. Найдите множество значений n, при которых дробь принимает целые значения:

а) $\frac{6}{n}$, где $n \in \boldsymbol{N}$; в) $\frac{9}{n-5}$, где $n \in \boldsymbol{N}$;

б) $\frac{5}{n}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{17}{n+2}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

17. При каких значениях m, где $m \in \boldsymbol{Z}$, принимает целые значения дробь:

а) $\frac{7}{2m+1}$; б) $\frac{4}{3m-2}$; в) $\frac{10}{7m-3}$; г) $\frac{6}{5m+1}$?

18. При каких значениях y значение дроби равно нулю:

а) $\frac{y}{20}$; в) $\frac{y(y-9)}{3}$; д) $\frac{y^2+2y}{3y}$;

б) $\frac{y-2}{y}$; г) $\frac{y^2-36}{y^2+36}$; е) $\frac{y^2-6y+9}{y^2+3y}$?

19. При каких значениях x равна нулю дробь:

а) $\frac{4x - x^3}{4x}$; в) $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$;

б) $\frac{4 - x^2}{2x + 4}$; г) $\frac{4}{4 - x^2}$?

20. Пользуясь определением частного, докажите тождество:

а) $\frac{m^2 + 3m - 4}{m - 1} = m + 4$; в) $\frac{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b$;

б) $\frac{a^4 - 7a^2 + 1}{a^2 + 3a + 1} = a^2 - 3a + 1$; г) $\frac{a^4 - 4a^3 + 10a^2 - 12a + 9}{a^2 - 2a + 3} = (a - 1)^2 + 2$.

Упражнения для повторения

21. Запишите путём перечисления элементов множество обыкновенных дробей с числителем, равным 1, и знаменателем b, где:

а) b — простое двузначное число, меньшее 50;

б) b — простое двузначное число, большее 50.

22. Разложите многочлен на множители:

а) $10ab + 15b^2$; в) $x^2 + xy - 3x - 3y$; д) $a^4 - 16$;

б) $27a^2 - 18ab$; г) $2xy - 5y^2 - 6x + 15y$; е) $49 - b^4$.

23. Разложите на множители выражение:

а) $x^2 - 10x + 25$; в) $(a + 1)^2 - 9a^2$; д) $x^3 + 8y^3$;

б) $y^2 + 6y + 9$; г) $b^2 - (b - 2)^2$; е) $x^3 - 27y^3$.

2. Свойства дробей

Сначала рассмотрим *основное свойство дроби*. Докажем, что равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \qquad (1)$$

верно при всех допустимых значениях переменных, т. е. является тождеством.

Пусть $\frac{a}{b} = k$. Тогда по определению частного $a = bk$. Умножив обе части этого равенства на c, отличное от нуля, и применив переместительное и сочетательное свойства умножения, получим, что

$$ac = (bk)c, \quad \text{т. е.} \quad ac = (bc)k.$$

По определению частного, учитывая, что $bc \neq 0$, имеем: $\frac{ac}{bc} = k$.

Сравнивая равенства $\frac{a}{b} = k$ и $\frac{ac}{bc} = k$, заключаем, что $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Мы доказали, что при всех допустимых значениях переменных верно равенство (1), т. е. это равенство является тождеством.

Если вместо переменных a, b и c подставить произвольные выражения, имеющие смысл и тождественно не равные нулю, то также получится тождество.

Таким образом, любая дробь (числовая или содержащая переменные) обладает следующим свойством:

если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же выражение, не равные нулю, то получится тождественно равная ей дробь.

Это свойство называют *основным свойством дроби*.

Частным случаем этого свойства (когда a, b и c — натуральные числа) является известное вам свойство: если числитель и знаменатель обыкновенной дроби умножить на одно и то же натуральное число, то значение дроби не изменится.

Основное свойство дроби $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ позволяет дробь $\frac{a}{b}$ заменить тождественно равной дробью вида $\frac{ac}{bc}$. Такое преобразование называют *приведением дроби к новому знаменателю*.

Пример 1. Приведём дробь $\frac{5}{2a^2b}$ к знаменателю $6a^2b^2$.

Это означает, что мы должны заменить данную дробь тождественно равной ей дробью со знаменателем $6a^2b^2$.

Так как $6a^2b^2 = 2a^2b \cdot 3b$, умножим числитель и знаменатель данной дроби на множитель $3b$:
$$\frac{5}{2a^2b} = \frac{5 \cdot 3b}{2a^2b \cdot 3b} = \frac{15b}{6a^2b^2}.$$

Множитель $3b$ называют *дополнительным множителем* к знаменателю и числителю дроби $\frac{5}{2a^2b}$.

Перепишем тождество (1) в виде
$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b},$$
поменяв в нём левую и правую части.

Это тождество позволяет дробь $\frac{ac}{bc}$, т. е. дробь, числитель и знаменатель которой имеют общий множитель, заменить тождественно равной дробью вида $\frac{a}{b}$. Такое преобразование называют *сокращением дроби*.

Пример 2. Сократим дроби:

$$\frac{26x}{13x^2} \text{ и } \frac{2x^2+6xy}{7xy+21y^2}.$$

Разложим на множители числитель и знаменатель каждой дроби и затем сократим дробь на общий множитель числителя и знаменателя (если такой множитель окажется):

$\frac{26x}{13x^2}=\frac{13x\cdot 2}{13x\cdot x}=\frac{2}{x}$ (здесь общий множитель — одночлен $13x$);

$\frac{2x^2+6xy}{7xy+21y^2}=\frac{2x(x+3y)}{7y(x+3y)}=\frac{2x}{7y}$ (здесь общий множитель — двучлен $x + 3y$).

Пример 3. Построим график функции

$$y=\frac{x^2-4}{x-2}.$$

Область определения функции есть множество всех чисел, кроме числа 2.

Сократим дробь в правой части формулы:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2.$$

Получаем формулу $y = x + 2$, где $x \neq 2$.

Графиком функции $y = x + 2$ является прямая, а графиком функции $y = x + 2$, где $x \neq 2$, — прямая с исключённой точкой (2; 4) (рис. 1).

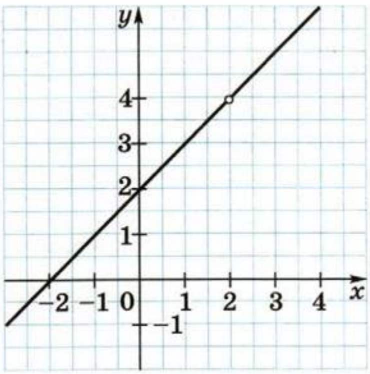


Рис. 1

Рассмотрим другие свойства дроби.

Если у дроби изменить знак числителя (или знаменателя) и знак перед дробью, то получится тождественно равная ей дробь.

Используя переменные, это свойство можно записать в виде тождеств:

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}, \quad \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}. \tag{2}$$

Докажем тождество $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$.

Обозначим дробь $\frac{-a}{b}$ буквой k, т. е. $\frac{-a}{b}=k$. Тогда по определению частного $-a = bk$. Умножив обе части этого равенства на -1, получим $a = -bk$, или $a = -kb$.

Отсюда $-k=\frac{a}{b}$, т. е. $k=-\frac{a}{b}$.

Значит,

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}.$$

Тождество $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ может быть получено из тождества $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$, если числитель и знаменатель дроби $\frac{-a}{b}$, записанной в левой части тождества, умножить на -1.

Пример 4. Найдём значение дроби

$$\frac{x^3 - 3x^2y + 4xy^2 + 3y^3}{2x^3 - x^2y - 10y^3},$$

если известно, что $\frac{5x + 8y}{7x - 8y} = 3$.

Числитель и знаменатель данной дроби — многочлены третьей степени, причём каждый член этих многочленов имеет одну и ту же степень, равную степени многочлена. Такие многочлены называют *однородными*. Если разделить числитель и знаменатель этой дроби на y^3 (или x^3), то получим выражение, значение которого зависит от $\frac{x}{y}$ $\left(\text{или } \frac{y}{x}\right)$.

Разделим числитель и знаменатель данной дроби на y^3. Получим дробь

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\frac{x}{y} + 3}{2\left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 10}.$$

Из условия $\frac{5x + 8y}{7x - 8y} = 3$ находим значение $\frac{x}{y}$:

$$5x + 8y = 3(7x - 8y),\quad 5x + 8y = 21x - 24y,\quad x = 2y,\quad \frac{x}{y} = 2.$$

Подставим это значение в преобразованную дробь. Получим:

$$\frac{2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 3}{2 \cdot 2^3 - 2^2 - 10} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Пример 5. Сократим дробь $\frac{3x - xy + 2y - 6}{xy - 3x + 2y - 6}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{3x - xy + 2y - 6}{xy - 3x + 2y - 6} = \frac{(3x - xy) - (6 - 2y)}{(xy - 3x) + (2y - 6)} = \frac{x(3 - y) - 2(3 - y)}{x(y - 3) + 2(y - 3)} = \frac{(3 - y)(x - 2)}{(y - 3)(x + 2)}.$$

По свойству (2) дробь $\frac{(3 - y)(x - 2)}{(y - 3)(x + 2)}$ можно заменить дробью $-\frac{(y - 3)(x - 2)}{(y - 3)(x + 2)}$ (мы изменяем знак одного из множителей в числителе и знак перед дробью).

Далее имеем:

$$\frac{(3 - y)(x - 2)}{(y - 3)(x + 2)} = -\frac{(y - 3)(x - 2)}{(y - 3)(x + 2)} = -\frac{x - 2}{x + 2}.$$

Мы рассмотрели примеры сокращения дробей, у которых числитель и знаменатель являются многочленами с целыми коэффициентами. Если числитель или знаменатель дроби не является многочленом с целыми коэффициентами, то такие дроби можно привести, используя основное свойство дроби, к дробям, числитель и знаменатель которых — многочлены с целыми коэффициентами.

Например, дробь $\dfrac{\frac{1}{3}y^2}{\frac{1}{4}y-1}$ можно привести к дроби $\dfrac{4y^2}{3y-12}$, умножив её числитель и знаменатель на 12.

Упражнения

24. Приведите дробь к знаменателю $12x^2y$:

а) $\dfrac{1}{6x^2}$; б) $\dfrac{5}{3xy}$; в) $\dfrac{7x}{4y}$; г) $\dfrac{5}{12x}$.

25. Представьте двучлен $3x - y$ в виде дроби со знаменателем, равным:

а) 7; б) x; в) $9x + y$; г) $3x - y$.

26. Приведите дробь $\dfrac{a}{x-2}$ к знаменателю:

а) $x^2 - 2x$; б) $5x - 10$; в) $x^2 - 4$; г) $4 - x^2$; д) $6 - 3x$; е) $x^3 - 8$; ж) $(x - 2)^2$; з) $(x - 2)^3$.

27. Сократите дробь:

а) $\dfrac{8xy}{32y}$; б) $\dfrac{18ab}{27bc}$; в) $\dfrac{ax^2}{2a^2x}$; г) $\dfrac{bc}{5b^2c^2}$; д) $\dfrac{-21b^2y^2}{-28by}$; е) $\dfrac{-49a^3}{14b^3}$.

28. Сократите дробь (n — натуральное число):

а) $\dfrac{5a^{3n}}{2a^n}$; б) $\dfrac{48b^{2n-1}}{80b^{3n-1}}$; в) $\dfrac{17x^{n+1}}{51x^{n+4}}$; г) $\dfrac{91y^{3n-1}}{28y^{n+1}}$.

29. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{4^{10}}{8^7}$; б) $\dfrac{27^3}{9^5}$; в) $\dfrac{14^8}{4^4 \cdot 7^7}$; г) $\dfrac{18^3 \cdot 4^2}{12^4}$.

30. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^3(a-5)}{a-5}$; б) $\dfrac{3(b+7)^4}{8(b+7)^6}$; в) $\dfrac{x^3-4x}{y(x-2)}$; г) $\dfrac{5(a-2c)^2}{2a^2-4ac}$; д) $\dfrac{(12a-12b)^5}{(6a-6b)^5}$; е) $\dfrac{(x-2y)^5}{(x^2-4xy+4y^2)^5}$.

31. Сократите дробь:

а) $\dfrac{ax-3a}{bx-3b}$; в) $\dfrac{3b-9c}{5b^2-15bc}$; д) $\dfrac{6x^2y-3xy^2}{6x^2y}$;

б) $\dfrac{5x+20y}{15x+60y}$; г) $\dfrac{8a^2+40ab}{ab+5b^2}$; е) $\dfrac{8ab^3}{4a^2b^2+8ab^3}$.

32. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^2-b^2}{3a+3b}$; в) $\dfrac{2x+4y}{x^2-4y^2}$; д) $\dfrac{(x-1)^2}{5x-5}$; ж) $\dfrac{a^2-49}{a^2-14a+49}$;

б) $\dfrac{x^2-9}{4x-12}$; г) $\dfrac{3a+15b}{a^2-25b^2}$; е) $\dfrac{y^2+4y+4}{y^2+2y}$; з) $\dfrac{b^2+10b+25}{b^2-25}$.

33. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{5x^2-35xy}{2xy-14y^2}$ при $x = 0{,}12,\ y = 0{,}4$;

б) $\dfrac{12a^2+30ab}{4a^2-25b^2}$ при $a = -0{,}5,\ b = -2{,}6$;

в) $\dfrac{a^2-8ax+16x^2}{4a^2-16ax}$ при $a=\dfrac{5}{7},\ x=\dfrac{1}{8}$;

г) $\dfrac{4b^2-9y^2}{4b^2+12by+9y^2}$ при $b=-\dfrac{1}{4},\ y=-\dfrac{5}{6}$.

34. Сократите дробь:

а) $\dfrac{27x^3+y^3}{9x^2-3xy+y^2}$; г) $\dfrac{10x+5y}{2ax+ay-2bx-by}$;

б) $\dfrac{b^{12}+b^6+1}{b^{18}-1}$; д) $\dfrac{b^2+2bd-by-2dy}{b^2+4bd+4d^2}$;

в) $\dfrac{ax+bx-2ay-2by}{3x-6y}$; е) $\dfrac{9a^2-4b^2}{6ab+2b-3a-4b^2}$.

35. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^{2n}-b^4}{a^{n+1}-ab^2}$; в) $\dfrac{x^{n+1}-2x^n-3x^{n-1}}{x^2-5x+6}$;

б) $\dfrac{x^{n+2}y^n+x^ny^{n+2}}{x^4y^n-y^{n+4}}$; г) $\dfrac{b^{n+1}+7b^n+12b^{n-1}}{b^{n+2}+b^{n+1}-12b^n}$.

36. Зная, что $\dfrac{2x-7y}{y}=3$, найдите значение дроби:

а) $\dfrac{x^3-5x^2y+8xy^2-3y^3}{2x^3-8x^2y-7xy^2+22y^3}$; б) $\dfrac{x^4+5y^4}{x^3y-x^2y^2+xy^3}$.

37. Сократите дробь:

а) $\frac{3(x-a)}{7(a-x)}$; в) $\frac{7a^2-21ab}{24b^2-8ab}$; д) $\frac{(2x-3y)^2}{6y-4x}$;

б) $\frac{x(b-y)}{y(y-b)}$; г) $\frac{4x^2-9y^2}{3xy-2x^2}$; е) $\frac{(2x-3y)^3}{(3y-2x)^2}$.

38. Упростите выражение:

а) $\frac{ay-ab}{bx-ab-xy+ay}$; в) $\frac{10a-a^2-25}{3a-15}$;

б) $\frac{bx-ax+by-ay}{a^2-b^2}$; г) $\frac{-a^3-8}{2a-a^2-4}$.

39. Покажите, что значение дроби не зависит от n ($n \in N$):

а) $\frac{5^{n+3}-5^n}{5^{n+2}+5^{n+1}+5^n}$; б) $\frac{81^{n+1}-3^{n+4}}{3^{n+2}(27^n-1)}$.

40. Сократите дробь:

а) $\frac{(a+1)^2+1}{a^4+4}$; д) $\frac{(x-4)^2+(x-8)^2-10}{(x+1)^2+(x-3)^2-80}$;

б) $\frac{b^3+1}{b^5+b^4+b^3+b^2+b+1}$; е) $\frac{(ax-by)^2+(bx+ay)^2}{(cx-ay)^2+(ax+cy)^2}$;

в) $\frac{9x^2+3x+1}{81x^4+9x^2+1}$; ж) $\frac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}$;

г) $\frac{8y^6-1}{16y^8-4y^4-4y^2-1}$; з) $\frac{a^3-2a^2+5a+26}{a^3-5a^2+17a-13}$.

41. Постройте график функции:

а) $y=\frac{x^2-16}{2x+8}$; б) $y=\frac{x^4-4x^2}{x^2-4}$.

42. Постройте график уравнения

$$\frac{4x^2-y^2-2y-1}{2x+y+1}=0.$$

43. Замените дробь тождественно равной ей дробью, числитель и знаменатель которой — многочлены с целыми коэффициентами:

а) $\frac{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}a-\frac{1}{12}}$; б) $\frac{0{,}5x^2-1{,}25x+1}{0{,}25x+0{,}75}$.

44. Упростите выражение:

а) $\frac{n!}{(n+1)!}$; б) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

Замечание. Запись $n!$ читается «эн факториал» и означает произведение всех натуральных чисел от 1 до n, т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$.

Упражнения для повторения

45. Найдите значение дроби:

а) $\frac{12{,}7^2 - 5{,}3^2}{5 \cdot 0{,}96 + 2{,}6}$; б) $\frac{3{,}6^2 + 7{,}2 \cdot 15{,}4 + 15{,}4^2}{1{,}9(13{,}2 - 3{,}7)}$.

46. Решите уравнение:

а) $(x-2)(x-3) = 0$;
б) $(x-1)(x+2) = 0$;
в) $x^2 - 25 = 0$;
г) $x^3 - 4x = 0$;
д) $x^2 - 9x + 14 = 0$;
е) $x^2 + 7x - 8 = 0$.

47. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $x^2 - 6x + 10$; б) $a^2 + 4b^2 + 26 - 4ab + 10a - 20b$.

48. Разложите на множители:

а) $x^2 + x + \frac{1}{4}$; б) $y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$; в) $a^4 - 16$; г) $a^4 + 324$.

? Контрольные вопросы и задания

1. Какое выражение называют дробью? Приведите примеры числовой дроби и дроби, содержащей переменные.

2. Укажите допустимые значения переменных для дроби:

а) $\frac{x}{x-8}$; б) $\frac{y}{y^2-1}$; в) $\frac{a}{a-b}$.

3. Какое выражение называется рациональным, целым, дробным? Приведите примеры целого и дробного рациональных выражений.

4. Сформулируйте основное свойство дроби. Запишите тождество, выражающее это свойство, и докажите его.

5. Поясните на примере, как выполняется сокращение дробей.

6. Докажите тождества $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ и сформулируйте соответствующие свойства дроби.

§ 2. Сумма и разность дробей

3. Сложение и вычитание дробей

Покажем, что сумму и разность дробей всегда можно представить в виде дроби.

Рассмотрим случай, когда две дроби имеют одинаковый знаменатель, т. е. дроби вида $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$.

Докажем, что в этом случае выполняется тождество

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}. \qquad (1)$$

По условию $c \neq 0$, так как в противном случае дроби $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ не имели бы смысла.

Обозначим дробь $\frac{a}{c}$ буквой k, а дробь $\frac{b}{c}$ буквой l:

$$\frac{a}{c}=k, \quad \frac{b}{c}=l.$$

Тогда по определению частного

$$a = ck,\ b = cl \ \text{ и } \ a + b = ck + cl = c(k + l).$$

Значит, $a + b = c(k + l)$.

Отсюда, учитывая, что $c \neq 0$, получим, что $k+l=\frac{a+b}{c}$.

Так как $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=k+l$ и $k+l=\frac{a+b}{c}$, то

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Мы доказали, что равенство (1) верно при любых допустимых значениях переменных, т. е. мы доказали тождество.

Опираясь на тождество (1), выполним сложение трёх дробей:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{d}{c}=\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)+\frac{d}{c}=\frac{a+b}{c}+\frac{d}{c}=\frac{a+b+d}{c}.$$

Вообще для двух и более дробей выполняется правило:

чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить прежним.

Пример 1. Выполним сложение дробей

$$\frac{x^2+3xy}{5x-10y} \ \text{ и } \ \frac{4y^2-7xy}{5x-10y}.$$

Имеем:

$$\frac{x^2+3xy}{5x-10y}+\frac{4y^2-7xy}{5x-10y}=\frac{x^2+3xy+4y^2-7xy}{5x-10y}=\frac{x^2-4xy+4y^2}{5x-10y}=\frac{(x-2y)^2}{5(x-2y)}=\frac{x-2y}{5}.$$

Теперь рассмотрим разность дробей с одинаковыми знаменателями и представим её в виде дроби:

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a}{c}+\left(-\frac{b}{c}\right)=\frac{a}{c}+\frac{-b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

В преобразовании мы воспользовались свойством дроби: если у дроби изменить знак числителя и знак перед дробью, то получится тождественно равная ей дробь.

Таким образом, мы доказали тождество

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}, \qquad (2)$$

из которого следует правило:

чтобы вычесть из одной дроби другую с тем же знаменателем, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить прежним.

Пример 2. Выполним вычитание дробей

$$\frac{8ab-b^2}{12a^2-36ab} \text{ и } \frac{2ab+17b^2}{12a^2-36ab}.$$

Имеем:

$$\frac{8ab-b^2}{12a^2-36ab}-\frac{2ab+17b^2}{12a^2-36ab}=\frac{8ab-b^2-(2ab+17b^2)}{12a^2-36ab}=$$

$$=\frac{8ab-b^2-2ab-17b^2}{12a(a-3b)}=\frac{6ab-18b^2}{12a(a-3b)}=\frac{6b(a-3b)}{12a(a-3b)}=\frac{b}{2a}.$$

Сделаем важное уточнение. При сложении дробей (или выполнении других действий с дробями) принято преобразования производить до тех пор, пока в результате не получится несократимая дробь.

Для сложения (или вычитания) дробей с разными знаменателями дроби приводят к общему знаменателю и затем выполняют преобразование по правилам сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Пример 3. Представим в виде дроби сумму

$$\frac{a}{6x^2y}+\frac{b}{8xy^3}.$$

Сначала приведём дроби к общему знаменателю. Наиболее простым знаменателем является одночлен $24x^2y^3$. Действительно, коэффициент одночлена $24x^2y^3$ равен наименьшему общему кратному коэффициентов знаменателей дробей-слагаемых, а каждая переменная взята с наибольшим показателем, с которым она входит в знаменатели дробей. Дополнительный множитель к первой дроби равен $4y^2$, а ко второй дроби равен $3x$.

Имеем:

$$\frac{a}{6x^2y}+\frac{b}{8xy^3}=\frac{a\cdot 4y^2}{24x^2y^3}+\frac{b\cdot 3x}{24x^2y^3}=\frac{4ay^2+3bx}{24x^2y^3}.$$

Заметим, что если в качестве общего знаменателя взять произведение знаменателей дробей-слагаемых, т. е. одночлен $48x^3y^4$, то тогда преобразование окажется более сложным.

При сложении или вычитании дробей, знаменатели которых многочлены, знаменатели дробей разлагают (если это возможно) на множители. В результате удастся найти более простой общий знаменатель.

Пример 4. Сложим дроби $\frac{y}{3x^2 - xy}$ и $\frac{9x}{y^2 - 3xy}$.

Сначала разложим на множители знаменатель каждой дроби:

$$\frac{y}{3x^2 - xy} + \frac{9x}{y^2 - 3xy} = \frac{y}{x(3x - y)} + \frac{9x}{y(y - 3x)}.$$

Множители $3x - y$ и $y - 3x$ являются противоположными выражениями. Поэтому в качестве общего знаменателя можно взять $xy(3x - y)$ или $xy(y - 3x)$.

Продолжим преобразование, взяв за общий знаменатель выражение $xy(3x - y)$ (дополнительный множитель к первой дроби равен y, ко второй — $(-x)$):

$$\frac{y}{x(3x - y)} + \frac{9x}{y(y - 3x)} = \frac{y \cdot y}{xy(3x - y)} + \frac{9x(-x)}{xy(3x - y)} =$$

$$= \frac{y^2 - 9x^2}{xy(3x - y)} = \frac{(y - 3x)(y + 3x)}{xy(3x - y)} = -\frac{(3x - y)(y + 3x)}{xy(3x - y)} = -\frac{y + 3x}{xy}.$$

Здесь мы воспользовались свойством дроби: если изменить знак в числителе и перед дробью, то получится тождественно равная ей дробь.

Пример 5. Представим в виде дроби выражение:

$$2x - \frac{2x^3 - 10x^2 + 8x}{x^2 - 6x + 8} - 1.$$

Перепишем это выражение в виде $2x - 1 - \frac{2x^3 - 10x^2 + 8x}{x^2 - 6x + 8}$, заменим двучлен $2x - 1$ дробью со знаменателем 1 и выполним преобразования:

$$2x - 1 - \frac{2x^3 - 10x^2 + 8x}{x^2 - 6x + 8} = \frac{2x - 1}{1} - \frac{2x^3 - 10x^2 + 8x}{x^2 - 6x + 8} =$$

$$= \frac{(2x - 1)(x^2 - 6x + 8) - (2x^3 - 10x^2 + 8x)}{x^2 - 6x + 8} = \frac{-3x^2 + 14x - 8}{x^2 - 6x + 8} =$$

$$= \frac{(-x^2 + 6x - 8) + (-2x^2 + 8x)}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(-x^2 + 6x - 8)}{x^2 - 6x + 8} + \frac{-2x(x - 4)}{(x - 4)(x - 2)} =$$

$$= -1 - \frac{2x}{x - 2} = -\frac{x - 2 + 2x}{x - 2} = -\frac{3x - 2}{x - 2}.$$

Пример 6. Упростим выражение:

$$\frac{x^5+2x^4+4x^3}{x^4+4x^2+16}+\frac{8}{x^2-2x+4}.$$

Знаменатель первой дроби можно представить в виде разности квадратов двух выражений, если прибавить и вычесть одночлен $4x^2$.

Имеем:

$$\frac{x^5+2x^4+4x^3}{x^4+4x^2+16}+\frac{8}{x^2-2x+4}=\frac{x^5+2x^4+4x^3}{x^4+8x^2+16-4x^2}+\frac{8}{x^2-2x+4}=$$

$$=\frac{x^5+2x^4+4x^3}{(x^2+4)^2-(2x)^2}+\frac{8}{x^2-2x+4}=\frac{x^3(x^2+2x+4)}{(x^2+4-2x)(x^2+4+2x)}+\frac{8}{x^2-2x+4}=$$

$$=\frac{x^3}{x^2-2x+4}+\frac{8}{x^2-2x+4}=\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}=$$

$$=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4}=x+2.$$

Пример 7. Выполним действия:

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}+\frac{2x}{x^2+a^2}+\frac{4x^3}{x^4+a^4}.$$

В этом случае сложение выгодно выполнять последовательно: сначала сложить две первые дроби, затем к полученной сумме прибавить третью дробь и, наконец, к сумме первых трёх дробей прибавить четвёртую дробь.

Имеем:

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}+\frac{2x}{x^2+a^2}+\frac{4x^3}{x^4+a^4}=\frac{2x}{x^2-a^2}+\frac{2x}{x^2+a^2}+\frac{4x^3}{x^4+a^4}=$$

$$=\frac{4x^3}{x^4-a^4}+\frac{4x^3}{x^4+a^4}=\frac{8x^7}{x^8-a^8}.$$

Упражнения

49. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{a+b}{x}-\frac{b}{x}$;

б) $\frac{a}{y}-\frac{a-b}{y}$;

в) $\frac{x+y}{3c}+\frac{2y-x}{3c}$;

г) $\frac{10b+5}{6a}+\frac{1-4b}{6a}$;

д) $\frac{5x-3y}{10x}+\frac{8y-5x}{10x}$;

е) $\frac{x^2-2y^2}{5xy}-\frac{x^2-7y^2}{5xy}$;

ж) $\frac{a^2-b^2}{6b^2}-\frac{a^2+b^2}{6b^2}$;

з) $\frac{c^3-d^2}{8c^2d}+\frac{c^3+d^2}{8c^2d}$.

50. Упростите выражение:

а) $\frac{c-1}{12c}+\frac{2c+7}{12c}-\frac{6-3c}{12c}$;

б) $\frac{a-4b}{2ab}-\frac{2a-6b}{2ab}+\frac{3a-b}{2ab}$;

в) $\frac{5p-2q}{3pq}-\frac{2p-3q}{3pq}-\frac{p+q}{3pq}$;

г) $\frac{17x-4y}{21xy}+\frac{8x+9y}{21xy}-\frac{11x-16y}{21xy}$.

51. Выполните сложение или вычитание дробей:

а) $\frac{5x-2y}{x^2-y^2}+\frac{y-4x}{x^2-y^2}$;

б) $\frac{7z+8}{z^2-25}-\frac{5z-2}{z^2-25}$;

в) $\frac{16}{c+4}-\frac{c^2}{c+4}$;

г) $\frac{2a-3b}{(a+b)^2}+\frac{a}{(a+b)^2}$;

д) $\frac{8a-3b}{(a-b)^2}-\frac{2a+3b}{(a-b)^2}$;

е) $\frac{(x+y)^2}{x^2+xy+y^2}-\frac{xy}{x^2+xy+y^2}$.

52. Представьте в виде дроби (n — натуральное число):

а) $\frac{a^n}{a^{2n}-1}-\frac{1}{a^{2n}-1}$;

б) $\frac{b^{n+1}}{(b^n-2)^2}-\frac{2b}{(b^n-2)^2}$;

в) $\frac{2x^{3n}+6x^n}{(x^n-1)^2}-\frac{6x^{2n}+2}{(x^n-1)^2}$;

г) $\frac{y^{2n}-4y^n}{y^{n+1}-5y}-\frac{7y^n-30}{y^{n+1}-5y}$.

53. Упростите выражение:

а) $\frac{(a+b)^3}{3a^2+b^2}-\frac{(a-b)^3}{3a^2+b^2}$;

б) $\frac{(a+b)^3}{a^2+3b^2}+\frac{(a-b)^3}{a^2+3b^2}$;

в) $\frac{x^2-x}{x^2-9y^2}+\frac{9y^2-x}{9y^2-x^2}$;

г) $\frac{a^2-3ab}{(a-5b)^3}+\frac{7ab-25b^2}{(5b-a)^3}$;

д) $\frac{81a^2}{(9a-3b)^2}-\frac{9b^2}{(9a-3b)^2}$;

е) $\frac{8x^3}{(2x-4y)^3}-\frac{64y^3}{(2x-4y)^3}$.

54. Приведите дроби к общему знаменателю и выполните сложение или вычитание:

а) $\frac{a}{2x}+\frac{b}{3x}$;

б) $\frac{c}{24y}-\frac{d}{18y}$;

в) $\frac{5x}{18y}+\frac{2x}{9y}$;

г) $\frac{9m}{15n}-\frac{m}{10n}$;

д) $\frac{x-3}{3x}+\frac{x+2}{2x}$;

е) $\frac{y-3}{6y}-\frac{y-4}{8y}$.

55. Выполните сложение или вычитание:

а) $\frac{x}{y^2}+\frac{2}{y}$;

б) $\frac{2x}{y}-\frac{x}{y^2}$;

в) $\frac{1-a}{a^2}+\frac{1}{a}$;

г) $\frac{x+a}{x^2}+\frac{x-a}{ax}$;

д) $\frac{y+b}{y^2}+\frac{y+b}{by}$;

е) $\frac{a-2b}{ab^2}-\frac{b-2a}{a^2b}$;

ж) $\frac{c-d}{c^2d}-\frac{c+d}{cd^2}$;

з) $\frac{a^2-b^2}{b^5}+\frac{2}{b^3}$;

и) $\frac{x^3+1}{x^7}-\frac{1}{x^4}$.

56. Выполните сложение или вычитание:

а) $\frac{x+y}{x}+\frac{x}{x-y}$; в) $\frac{1}{2x-3}-\frac{1}{2x+3}$; д) $\frac{a}{5a-10}+\frac{1}{4-2a}$;

б) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$; г) $\frac{3}{2y+4}-\frac{1}{3y+6}$; е) $\frac{b}{8b-20}-\frac{b-5}{5-2b}$.

57. Докажите, что при любых $x \neq y$ и $y \neq 0$ выражение $\frac{x}{y}+\frac{x+y}{x-y}-\frac{x^2+xy}{xy-y^2}$ принимает единственное значение.

58. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{a+3}{a^2-3a}+\frac{a-9}{3a-9}$; в) $\frac{2}{x^2+2xy}+\frac{1}{xy+2y^2}$; д) $\frac{c}{c^2-9}+\frac{c+2}{c^2-3c}$;

б) $\frac{b-4}{2b-4}-\frac{2}{2b-b^2}$; г) $\frac{1}{xy-x^2}-\frac{1}{y^2-xy}$; е) $\frac{d+1}{d+4}-\frac{d^2-4}{d^2-16}$.

59. Упростите выражение: а) $\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}$; б) $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}$.

60. Заполните таблицу, вычислив значения выражений a^2+a и $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$ для указанных в таблице значений переменной a.

	a					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
a^2+a						
$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$						

Какими числами являются соответственные значения этих выражений?

61. Упростите выражение ($n \in N$):

а) $\frac{a^{n+2}-6a^{n+1}+9a^n}{a^3-9a^2+27a-27}-\frac{3a^{n-1}}{a-3}$; в) $\frac{x^{2n}+x^n-6}{2x^n+6}-\frac{x^{2n}-6x^n+8}{2x^n-4}$;

б) $\frac{x^{n-1}}{x^ny-y^{n+1}}-\frac{y^{n-1}}{x^{n+1}-xy^n}$; г) $\frac{(a^n+b^n)^2}{a^n-b^n}-\frac{(a^n-b^n)^2}{a^n+b^n}-\frac{8b^n}{\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}-1}$.

62. Представьте двучлен $a-b$ в виде дроби со знаменателем, равным:

а) 1; б) 3; в) a; г) $a+b$.

63. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $a+\frac{1}{a}$; в) $\frac{x+y}{x-y}-1$; д) $p-4-\frac{16}{p-4}$;

б) $b-\frac{1}{b+1}$; г) $\frac{(x-y)^2}{2x}+y$; е) $c+d-\frac{c^2+d^2}{c+d}$.

64. Упростите выражение:

а) $\frac{x+3}{x}-\frac{x}{x-3}+\frac{9}{x^2-3x}$; г) $\frac{1}{(a-3)^2}-\frac{2}{a^2-9}+\frac{1}{(a+3)^2}$;

б) $\frac{3}{y+5}-\frac{2}{y-5}+\frac{30}{y^2-25}$; д) $\frac{1}{x-2}-\frac{6x}{x^3-8}+\frac{x-2}{x^2+2x+4}$;

в) $\frac{b+c}{b^2-bc}-\frac{4b}{b^2-c^2}-\frac{b-c}{b^2+bc}$; е) $\frac{1}{x+3}-\frac{10x+3}{x^3+27}+\frac{x+4}{x^2-3x+9}$.

65. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\frac{x^2-4x}{xy-4x-3y+12}-\frac{x-2}{y-4}$; в) $\frac{2b}{a^2+2ab}-\frac{b}{2a-3a^2}+\frac{6b+2}{2a+4b-6ab-3a^2}$;

б) $\frac{y^2}{xy-5x+y-5}+\frac{2}{x+1}$; г) $\frac{a^2+3b}{a^2-ab+3a-3b}-\frac{ab-3a}{a^2+ab+3a+3b}+1$.

66. Упростите выражение:

а) $\frac{(x+y)^2}{x^2+xy}+\frac{(x-y)^2}{x^2-xy}+7$; в) $\frac{x^3}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$;

б) $\frac{x^2-9y^2}{6x-18y}-\frac{x^2+6xy+9y^2}{6x+18y}+3y$; г) $\frac{(x+1)^3}{x}-\frac{(x+1)^2}{x+2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}$.

67. Докажите, что при любых допустимых значениях переменной значение выражения:

а) $\frac{a^3}{a-3}-\frac{3a^3+81}{a^2-9}$ является положительным числом;

б) $\frac{2b^2+8b+6}{b^2-9}+\frac{(b-1)^3}{3-b}$ является отрицательным числом.

68. Докажите, что при любом натуральном n верно равенство

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Воспользовавшись этим равенством, найдите значение суммы

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\frac{9}{4^2\cdot 5^2}.$$

69. Представьте сумму в виде дроби:

а) $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$;

б) $\frac{1}{(x+1)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+7)}+\frac{1}{(x+7)(x+9)}$.

70. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a+2}+\frac{2a}{a^2+4}+\frac{4a^3}{a^4+16}+\frac{8a^7}{a^8+256}$;

б) $\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{2b^2}{b^4+1}+\frac{4b^6}{b^8+1}+\frac{8b^{14}}{b^{16}+1}$.

71. Упростите выражение:

а) $\frac{x-3}{x^3+2x^2-9x-18}+\frac{x+2}{x^2+5x+6}$;

б) $\frac{a^6+b^6}{a^4(a^2+3b^2)+b^4(3a^2+b^2)}+\frac{3a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$;

в) $\frac{2x^3-12x^2+24x-16}{0{,}5x^3-3x^2+6x-4}-\frac{2x^2-8x+8}{0{,}125x^2-0{,}5x+0{,}5}$;

г) $\frac{a^2-(b-c)^2}{(a-b+c)^2}+\frac{(a+b+c)^2}{(a+c)^2-b^2}$;

д) $\frac{x-y}{x}+\frac{(x-y)^2}{x^2}-\frac{(x-y)^3}{x^3}-\frac{(x^2-y^2)^2+y^3(x-y)}{x^4}$.

Упражнения для повторения

72. Решите уравнение:

а) $\frac{3x-1}{2}-\frac{2x+3}{3}=\frac{5x+15}{6}$;

б) $\frac{7x-4}{2}-2=\frac{8x-1}{5}$;

в) $\frac{(2x-1)(3x-2)}{6}=x^2-\frac{x-6{,}5}{5}$;

г) $\frac{(5x-3)(2x-4)}{5}=2x^2-\frac{6x-7}{2}$.

73. Докажите, что парабола $y=x^2$ и прямая $y=14x-49$ имеют только одну общую точку.

74. Найдите координаты точек пересечения графика уравнения $x^2-y=9$ с осями координат.

4. Представление дроби в виде суммы дробей

Сумму двух или более дробей можно единственным образом представить в виде несократимой дроби, числитель и знаменатель которой — целые числа или многочлены.

Обратная задача — представление данной дроби в виде суммы двух или более дробей — неопределённая, т. е. допускает сколько угодно решений.

Действительно, если дана дробь $\frac{a}{b}$ и требуется эту дробь представить в виде суммы двух дробей, то в качестве одного из слагаемых мы можем взять произвольную дробь $\frac{c}{d}$. Тогда вторая дробь равна разности $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$, т. е. дроби $\frac{ad-bc}{bd}$.

Например, обыкновенную дробь $\frac{7}{12}$ можно представить в виде суммы двух дробей следующим образом:

$$\frac{7}{12}=\frac{3+4}{12}=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3},$$

или

$$\frac{7}{12}=\frac{14}{24}=\frac{4+10}{24}=\frac{4}{24}+\frac{10}{24}=\frac{1}{6}+\frac{5}{12},$$

или

$$\frac{7}{12}=\frac{21}{36}=\frac{3+18}{36}=\frac{3}{36}+\frac{18}{36}=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}.$$

Дробь $\frac{x^3}{x^2-1}$ можно представить в виде суммы по-разному:

$$\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{x^3-x+x}{x^2-1}=\frac{x^3-x}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-1}=\frac{x(x^2-1)}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1}$$

или

$$\frac{x^3}{x^2-1}=\frac{x^3-1+1}{x^2-1}=\frac{x^3-1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-1}=$$

$$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{x^2+x+1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=$$

$$=\frac{x(x+1)+1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{x(x+1)}{x+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=$$

$$=x+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}.$$

Для представления дроби в виде суммы нескольких дробей можно воспользоваться *методом неопределённых коэффициентов*. Этот метод впервые применил французский философ Рене Декарт (1596—1650) в своей книге «Рассуждение о методе» (1637).

Покажем суть этого метода на примере.

Декарт Рене (1596—1650) — французский философ и математик, физик и физиолог; заложил основы аналитической геометрии, ввёл понятия переменной величины и функции, автор многих алгебраических обозначений.

Пример 1. Представим дробь $\frac{2x+6}{x^2-4}$ в виде суммы (или разности) двух дробей, знаменателями которых являются двучлены первой степени.

Знаменатель дроби $\frac{2x+6}{x^2-4}$ есть произведение линейных двучленов $(x-2)(x+2)$. Представим дробь $\frac{2x+6}{(x-2)(x+2)}$ в виде суммы дробей $\frac{a}{x-2}$ и $\frac{b}{x+2}$, где a и b — некоторые числа, т. е. покажем, что при некоторых значениях коэффициентов a и b выполняется равенство

$$\frac{2x+6}{(x-2)(x+2)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}.$$

Сложим дроби в правой части написанного равенства:

$$\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}=\frac{ax+2a+bx-2b}{x^2-4}=\frac{(a+b)x+2(a-b)}{x^2-4}.$$

Равенство

$$\frac{2x+6}{x^2-4}=\frac{(a+b)x+2(a-b)}{x^2-4}$$

должно быть тождеством.

Так как знаменатели дробей равны, то должны быть равны и числители, т. е.

$$2x+6=(a+b)x+2(a-b).$$

Отсюда имеем систему

$$\begin{cases} a+b=2, \\ 2(a-b)=6. \end{cases}$$

Решив её, найдём, что $a=2{,}5$, $b=-0{,}5$.

Следовательно,

$$\frac{2x+6}{x^2-4}=\frac{2{,}5}{x-2}+\frac{-0{,}5}{x+2}=\frac{5}{2x-4}-\frac{1}{2x+4}.$$

Представление дроби в виде суммы нескольких слагаемых позволяет проще решать некоторые задачи. Покажем это.

Пример 2. Найдём значение дроби $\frac{x^3+x+222}{37x}$ при $x=6$.

Представим данную дробь в виде суммы двух дробей и проведём вычисления. Получим:

$$\frac{x^3+x+222}{37x}=\frac{x(x^2+1)}{37x}+\frac{6\cdot 37}{37x}=\frac{x^2+1}{37}+\frac{6}{x}=\frac{6^2+1}{37}+\frac{6}{6}=1+1=2.$$

Пример 3. При каком целом n значение дроби $\frac{2n^2-7n+12}{n-2}$ является целым числом?

Представим дробь $\frac{2n^2-7n+12}{n-2}$ в виде суммы многочлена и дроби. Для этого разделим многочлен $2n^2 - 7n + 12$ на двучлен $n - 2$. Деление выполняют обычно уголком так же, как при делении целых чисел:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;2n^2-7n+12 & n-2 \\
\underline{2n^2-4n} & \overline{2n-3} \\
-\;-3n+12 & \\
\underline{-3n+6} & \\
6 &
\end{array}
$$

В результате деления получили, что частное равно $2n - 3$ и остаток равен 6.

Отсюда следует, что

$$\frac{2n^2-7n+12}{n-2}=2n-3+\frac{6}{n-2}.$$

Двучлен $2n - 3$ при любом целом n является целым числом. Дробь $\frac{6}{n-2}$ принимает целые значения, если $n - 2 \in \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$ и только при этих n. Отсюда $n \in \{-4; -1; 0; 1; 3; 4; 5; 8\}$.

Значит, при $n \in \{-4; -1; 0; 1; 3; 4; 5; 8\}$ данная дробь является целым числом.

Выполнив деление, мы представили дробь $\frac{2n^2-7n+12}{n-2}$ в виде суммы двух слагаемых: многочлена $2n - 3$ и *правильной дроби*, т. е. дроби, у которой степень числителя меньше степени знаменателя. Такое преобразование называют *выделением целой части из дроби*.

Заметим, что если при делении многочлена на многочлен в остатке окажется нуль, то это означает, что данный многочлен делится на другой многочлен. Например, многочлен $2x^3 - 13x^2 + 16x - 5$ делится на двучлен $x - 5$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;2x^3-13x^2+16x-5 & x-5 \\
\underline{2x^3-10x^2} & \overline{2x^2-3x+1} \\
-\;-3x^2+16x & \\
\underline{-3x^2+15x} & \\
-\;x-5 & \\
\underline{x-5} & \\
0 &
\end{array}
$$

Пример 4. Найдём значение дроби $\frac{3a^2+5ab+20b^2}{a^2}$, если известно, что $\frac{b}{a}=0{,}2$.

Представим данную дробь в виде суммы, поделив почленно каждый член числителя на знаменатель, а затем заменим частное $\frac{b}{a}$ его значением — числом 0,2:

$$\frac{3a^2+5ab+20b^2}{a^2}=\frac{3a^2}{a^2}+\frac{5ab}{a^2}+\frac{20b^2}{a^2}=3+5\cdot\frac{b}{a}+20\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2=$$
$$=3+5\cdot 0{,}2+20\cdot 0{,}2^2=3+1+0{,}8=4{,}8.$$

Упражнения

75. Представьте дробь в виде суммы двух дробей с однозначными знаменателями:

а) $\frac{8}{15}$; б) $\frac{15}{56}$; в) $\frac{29}{45}$; г) $\frac{41}{63}$.

76. Представьте дробь в виде суммы трёх дробей:

а) $\frac{119}{182}$; б) $\frac{103}{165}$.

77. Представьте дробь $\frac{1}{2}$ в виде суммы трёх дробей со знаменателями:

а) 5, 6 и 15; б) 4, 6 и 12; в) 6, 10 и 30.

78. При каких значениях a и b выполняется тождество:

а) $\frac{3x}{(x+1)(x-2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-2}$;

б) $\frac{5x-3}{x^2-9}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+3}$?

79. Представьте дробь в виде суммы двух дробей, знаменатели которых — многочлены первой степени относительно x:

а) $\frac{5x-1}{x(x-1)}$; в) $\frac{4x+3}{x^2-1}$; д) $\frac{x+28}{x^2-36}$;

б) $\frac{7x-6}{(x+2)(x-3)}$; г) $\frac{x+2}{x^2-25}$; е) $\frac{3x-4}{x^2+10x+24}$.

80. Представьте дробь в виде суммы двух дробей, знаменатели которых — многочлены первой степени:

а) $\frac{6x+1}{4x^2-1}$; в) $\frac{x+17}{(2x-1)(3x+2)}$;

б) $\frac{3x+18}{9x^2-4}$; г) $\frac{7x-6}{(4x-1)(3x-5)}$.

81. Выполните деление многочлена на многочлен:

а) $(a^3 - 4a^2 - 16a + 15) : (a + 3)$;

б) $(6x^4 + 13x^3 - 9x^2 - 31x - 14) : (3x + 2)$;

в) $(y^3 - 21y - 20) : (y + 4)$;

г) $(8b^4 - 22b^3 + b^2 + 16b - 15) : (2b - 5)$.

82. Выделите целую часть из дроби и выясните, при каких натуральных n дробь принимает натуральные значения:

а) $\frac{7n^2 + 3n + 12}{n}$; в) $\frac{(n-7)^2}{n}$; д) $\frac{n^2 - 8n + 17}{n-4}$;

б) $\frac{2n^2 - 8n + 5}{n}$; г) $\frac{(2n-3)^3}{n^3}$; е) $\frac{n^3 - 6n^2 + 12n + 3}{(n-2)^2}$.

83. Зная, что $m \in \boldsymbol{Z}$, найдите целые значения дроби:

а) $\frac{m^2 - 10m + 27}{m-5}$; б) $\frac{(m-6)^2}{m-3}$; в) $\frac{(3m-4)^3}{m^3}$.

84. Найдите значение дроби $\frac{(x-2y)^2}{y^2}$, если:

а) $\frac{x}{y} = 3$; б) $\frac{x-y}{y} = 1$; в) $\frac{2x-3y}{y} = 7$.

85. Докажите, что при любом x, отличном от нуля, значение дроби $\frac{3x^2+4}{x^2+1}$ является дробным числом.

86. Укажите все точки графика функции $y = \frac{x^2 - 4x + 6}{x-2}$, координаты которых являются целыми числами.

87. Запишите уравнения всех прямых, не имеющих общих точек с графиком функции $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x-1}$ и проходящих через точку с координатами:

а) $(2; 3)$; б) $(2; 4)$; в) $(0; 1)$.

88. Докажите, что графики функций $y = -2x + 6$ и $y = \frac{(x-3)^4}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$ не имеют общих точек.

Упражнения для повторения

89. Выполните сложение или вычитание дробей:

а) $\frac{x+4}{x^2-2x} - \frac{x}{x^2-4}$; в) $\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3} - \frac{1}{a+b}$;

б) $\frac{3}{2y+1} + \frac{y+7}{1-4y^2}$; г) $\frac{1}{a-b} - \frac{3ab}{a^3-b^3}$.

90. Найдите значение дроби $\dfrac{b^3+b^2+b+1}{1+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{b^3}}$ при $b=-\dfrac{1}{2}$.

91. Две речные пристани A и B расположены на расстоянии s км друг от друга. Между ними курсирует катер, скорость которого в стоячей воде равна v км/ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Сколько времени t (в часах) потребуется катеру на путь от A до B и обратно? Найдите t, если $s = 60$, $v = 33$.

? Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте правила сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями. Приведите примеры.

2. В чём состоит правило сложения дробей с разными знаменателями? Приведите пример.

3. Представьте дробь $\dfrac{4x}{x^2-9}$ в виде суммы дробей вида $\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x+3}$, используя метод неопределённых коэффициентов.

4. Найдите целые значения n, при которых значение дроби $\dfrac{n^2-2n+6}{n}$ является целым числом.

§ 3. Произведение и частное дробей

5. Умножение дробей. Возведение дроби в степень

Покажем, что произведение двух дробей тождественно равно дроби, у которой числитель равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей перемножаемых дробей. Иначе говоря, докажем, что если $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — произвольные дроби, то имеет место тождество

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}. \qquad (1)$$

Обозначим значение дроби $\frac{a}{b}$ буквой k, а значение дроби $\frac{c}{d}$ буквой l: $\frac{a}{b}=k$, $\frac{c}{d}=l$. Тогда по определению частного $a=bk$ и $c=dl$. Перемножив правые и левые части этих равенств и применив переместительное и сочетательное свойства умножения, найдём, что

$$ac = (bk)\cdot(dl) = (bd)(kl).$$

Отсюда, учитывая, что $b \neq 0$ и $d \neq 0$ и, следовательно, $bd \neq 0$, получим:

$$kl = \frac{ac}{bd}.$$

Подставив вместо k и l дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, получим:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Мы доказали, что равенство (1) верно при любых допустимых значениях переменных, т. е. является тождеством. Опираясь на тождество (1), можно доказать, что

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}.$$

Действительно, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}.$

Таким образом, при умножении дробей можно пользоваться правилом:

чтобы выполнить умножение дробей, нужно перемножить их числители и знаменатели отдельно и первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем дроби.

Пример 1. Выполним умножение дробей $\frac{x^4}{21y^3}$ и $\frac{14y^2}{x^3}$.

Применив правило умножения дробей, получим:

$$\frac{x^4}{21y^3} \cdot \frac{14y^2}{x^3} = \frac{x^4 \cdot 14y^2}{21y^3 \cdot x^3} = \frac{x \cdot 2}{3 \cdot y} = \frac{2x}{3y}.$$

Пример 2. Найдём произведение дробей $\frac{a^2 - 2ab}{b^2}$ и $\frac{4b^2}{a^2 - 4b^2}$.

По правилу умножения дробей имеем:

$$\frac{a^2 - 2ab}{b^2} \cdot \frac{4b^2}{a^2 - 4b^2} = \frac{(a^2 - 2ab) \cdot 4b^2}{b^2 \cdot (a^2 - 4b^2)} = \frac{a(a - 2b) \cdot 4b^2}{b^2(a - 2b)(a + 2b)} = \frac{4a}{a + 2b}.$$

Пример 3. Выполним умножение двучлена $(x^3 - 8)$ и дробей $\frac{1}{x^2 - 9x + 18}$ и $\frac{7x - 21}{9x^2 + 18x + 36}$.

Представим двучлен $x^3 - 8$ в виде дроби со знаменателем 1 и применим правило умножения дробей:

$$\frac{x^3 - 8}{1} \cdot \frac{1}{x^2 - 3x - 6x + 18} \cdot \frac{7x - 21}{9x^2 + 18x + 36} =$$

$$= \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \cdot 7(x - 3)}{(x(x - 3) - 6(x - 3)) \cdot 9(x^2 + 2x + 4)} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \cdot 7(x - 3)}{(x - 3)(x - 6) \cdot 9(x^2 + 2x + 4)} = \frac{7x - 14}{9x - 54}.$$

Используя правило умножения дробей, выведем правило возведения дроби в степень.

Имеем:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}.$$

Вообще, если $n \in N$, то:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ раз}} = \frac{\overbrace{aa \ldots a}^{n \text{ раз}}}{\underbrace{bb \ldots b}_{n \text{ раз}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Значит, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Чтобы возвести дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель дроби и первый результат записать в числитель, а второй — в знаменатель дроби.

Пример 4. Возведём дробь $\frac{2x}{3y^2}$ в четвёртую степень.

Применив правило возведения дроби в степень, получим:

$$\left(\frac{2x}{3y^2}\right)^4 = \frac{(2x)^4}{(3y^2)^4} = \frac{2^4x^4}{3^4(y^2)^4} = \frac{16x^4}{81y^8}.$$

Пример 5. Упростим выражение

$$\left(\left(\frac{a^2+3a-10}{a^2+7a+10}\right)^2\right)^n \cdot \left(\frac{a^2+2a}{2-a}\right)^{2n}.$$

Имеем:

$$\left(\left(\frac{a^2+3a-10}{a^2+7a+10}\right)^2\right)^n \cdot \left(\frac{a^2+2a}{2-a}\right)^{2n} = \left(\frac{(a-2)(a+5)}{(a+5)(a+2)}\right)^{2n} \cdot \left(\frac{a(a+2)}{a-2}\right)^{2n} =$$

$$= \frac{(a-2)^{2n}}{(a+2)^{2n}} \cdot \frac{a^{2n} \cdot (a+2)^{2n}}{(a-2)^{2n}} = a^{2n}.$$

Упражнения

92. Выполните умножение:

а) $\frac{7a}{12} \cdot \frac{3}{b}$; в) $\frac{a}{15b} \cdot \frac{5b}{a^2}$; д) $\frac{10a^3}{7b^3} \cdot \frac{2b}{5a}$; ж) $42x^6 \cdot \frac{1}{14x^8}$;

б) $\frac{4b}{3a} \cdot \frac{2a}{5b}$; г) $\frac{12x}{y^3} \cdot \frac{5y^2}{36}$; е) $\frac{8c^4}{9d^2} \cdot \frac{3d}{4c^2}$; з) $\frac{a}{13b^2} \cdot 26ab$.

93. Представьте в виде дроби:

а) $-\frac{11p^3}{8q^4}\cdot\frac{12q^2}{55p}$; г) $-3c^2d^2\cdot\left(-\frac{7}{9cd^2}\right)$;

б) $\frac{48x^6}{125y^6}\cdot\left(-\frac{50y^4}{9x^3}\right)$; д) $\frac{3x^2y}{4a^4}\cdot\frac{5a^2}{2xy}\cdot\frac{8a}{15}$;

в) $-\frac{35a^4x^4}{81b^4}\cdot\left(-\frac{27b^4}{14a^3x^3}\right)$; е) $\frac{3b}{28a^2}\cdot\frac{2a}{7b^4}\cdot 49a^4b^3$.

94. Выполните умножение (n — натуральное число):

а) $\frac{x^{n+1}}{y^{n-1}}\cdot\frac{y^{n+1}}{x^{n+3}}$; в) $\frac{a^n+b^n}{a^nb^n}\cdot\frac{a^{2n}b^{2n}}{a^{2n}-b^{2n}}\cdot\frac{b^n-a^n}{b^n}$;

б) $\frac{a^{2n-2}}{b^{3n-2}}\cdot\frac{b^{2n-1}}{a^{n-1}}$; г) $\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+x^n+1}\cdot\frac{x^{3n}-1}{x^n+1}$.

95. Преобразуйте в дробь:

а) $\frac{5(x+y)}{8xy}\cdot\frac{4x^2}{7(x+y)}$; в) $\frac{3x-6y}{xy}\cdot\frac{x^2}{xy-2y^2}$; д) $\frac{a^2-b^2}{4ab}\cdot\frac{8a}{3a+3b}$;

б) $\frac{2a-2b}{3ab}\cdot\frac{6a^2}{5a-5b}$; г) $\frac{3a}{ab-b^2}\cdot\frac{a^2-ab}{6b}$; е) $\frac{2x-4y}{x^2}\cdot\frac{x^3}{x^2-4y^2}$.

96. Упростите выражение:

а) $\frac{(a-x)^2}{(a+x)^2}\cdot\frac{2a^2+4ax+2x^2}{3a^2-6ax+3x^2}$; г) $\frac{1}{a^2-10ab+25b^2}\cdot(a^2-25b^2)$;

б) $(x^2-6x+9)\cdot\frac{1}{3x^2-9x}$; д) $\frac{(x^2+5)^2+4(x^2+5)+4}{x^2-10x+21}\cdot\frac{2x^2-18}{(x^2+7)^2}$;

в) $\frac{x^2-1}{x+2y}\cdot\frac{5x+10y}{x^2+x}$; е) $\frac{y^2+18y+77}{y^2-49}\cdot\frac{5y-35}{(y+8)^2+6(y+8)+9}$.

97. Докажите, что если $a+b=0$, то верно равенство

$$\left(\frac{a^2+6ab+9b^2}{a^2+10ab+25b^2}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

98. Выполните умножение:

а) $\frac{y^2-16}{x^2+xy}\cdot\frac{xy+y^2}{4y-y^2}\cdot\frac{1}{y^2+y-12}$; в) $\frac{(1+x+x^2)^2}{x^3-216}\cdot\frac{x^2+6x+36}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$;

б) $\frac{8x^2y}{(x-y)^3}\cdot\frac{(y-x)^2}{2x}\cdot\frac{1}{(x+y)^2-(x-y)^2}$; г) $\frac{(a+b)^2-3ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}\cdot\frac{a^4-b^4}{a^3+b^3}$.

99. Упростите выражение:

а) $\frac{a^2+3ab-2a-6b}{a^2-9b^2}\cdot\frac{a-3b}{a^2-4}$; в) $\frac{x^3-8}{25x^2}\cdot\frac{10x}{x^2+2x+4}\cdot\frac{15}{x^2+4x-12}$;

б) $\frac{xy-5y^2+2x-10y}{4x^3-xy^2}\cdot\frac{y-2x}{x-5y}$; г) $\frac{y^3+27}{y^2-4}\cdot\frac{y+2}{y^2-3y+9}\cdot\frac{y^2+y-2}{y^2+4y+3}$.

100. Возведите в степень:

а) $\left(\frac{x}{2y}\right)^3$; в) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2$; д) $\left(-\frac{3x^2}{y^3}\right)^2$; ж) $\left(\frac{x^2-14x+49}{x^2-12x+35}\right)^3$;

б) $\left(\frac{2x}{3}\right)^4$; г) $\left(\frac{2a}{5b}\right)^3$; е) $\left(-\frac{2x^3}{3y^2}\right)^3$; з) $\left(\frac{6a^2-54}{(a-3)^3}\right)^2$.

101. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3\cdot\frac{(x-y)^2+4xy}{(x+y)^2-4xy}$; в) $\left(-\frac{x^2+xy}{xy-y^2}\right)^6\cdot\left(\frac{2xy-x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}\right)^3$;

б) $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\cdot\frac{(a-b)^2+2ab}{(a-b)^2}$; г) $\left(\frac{ab-5a+6b-30}{ab+6a+3b+18}\right)^4\cdot\left(\frac{a^2+6a+9}{10b-b^2-25}\right)^2$.

102. Найдите значение выражения:

а) $\frac{9y^2-60y+100}{9y^2+30y+25}\cdot\frac{0{,}6y+1}{0{,}6y-2}$, если $y=-\frac{2}{3}$;

б) $\frac{0{,}2x^3-25}{6x^2-12x}\cdot\frac{0{,}1x-0{,}2}{0{,}2x^2+x+5}$, если $x=\frac{1}{5}$.

103. Упростите выражение $\frac{a^3+4a^2+10a+12}{a^3-a^2+2a+16}\cdot\frac{a^3-3a^2+8a}{a^2+2a+6}$.

Упражнения для повторения

104. Найдите частное и остаток от деления многочленов:

а) a^4+5a^3-6a+1 и a^2-3a+1;

б) $2b^4-6b^3+3b^2-2$ и b^2-b-2.

105. Средняя скорость пассажирского поезда на участке от пункта A до пункта B равна 80 км/ч, а товарного — 60 км/ч. Каково расстояние между пунктами A и B, если известно, что этот путь пассажирский поезд проходит на 12 мин быстрее, чем товарный?

106. Выразите x через a и b из уравнения:

а) $5x+b=a$; б) $2a-3x=b$; в) $\frac{x}{b}=a$; г) $\frac{a}{x}=b$.

6. Деление дробей

Докажем, что частное двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, где $b \neq 0$, $c \neq 0$ и $d \neq 0$, тождественно равно дроби $\frac{ad}{bc}$, т. е. имеет место тождество

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}. \quad (1)$$

Умножим дробь $\frac{ad}{bc}$ на дробь $\frac{c}{d}$:

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}.$$

Из тождества $\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ по определению частного вытекает, что равенство (1) является тождеством.

Тождество (1) можно представить в виде:

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, где $\frac{d}{c}$ — дробь, обратная дроби $\frac{c}{d}$.

При делении одной дроби на другую удобно пользоваться правилом:

чтобы разделить дробь на дробь, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

Пример 1. Разделим дробь $\frac{28a^6}{81b^5}$ на дробь $\frac{70a^5}{162b^4}$.

Применив правило, получим:

$$\frac{28a^6}{81b^5} : \frac{70a^5}{162b^4} = \frac{28a^6}{81b^5} \cdot \frac{162b^4}{70a^5} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 81 \cdot 2 \cdot a^6b^4}{81 \cdot 7 \cdot 10 \cdot a^5b^5} = \frac{4a}{5b}.$$

Пример 2. Выполним деление дроби $\frac{c^4 - 3c^2 + 1}{c^3 - 1}$ на дробь $\frac{c^2 - c - 1}{c^2 + c + 1}$.

Имеем:

$$\frac{c^4 - 3c^2 + 1}{c^3 - 1} : \frac{c^2 - c - 1}{c^2 + c + 1} = \frac{(c^2 - 1)^2 - c^2}{c^3 - 1} \cdot \frac{c^2 + c + 1}{c^2 - c - 1} =$$

$$= \frac{(c^2 - 1 + c)(c^2 - 1 - c)(c^2 + c + 1)}{(c - 1)(c^2 + c + 1)(c^2 - c - 1)} = \frac{c^2 + c - 1}{c - 1}.$$

Пример 3. Разделим дробь $\frac{c^2 + 6c + 9}{c - 5}$ на двучлен $c^2 + 3c$:

$$\frac{c^2 + 6c + 9}{c - 5} : (c^2 + 3c) = \frac{(c + 3)^2}{c - 5} \cdot \frac{1}{c(c + 3)} =$$

$$= \frac{(c + 3)^2 \cdot 1}{(c - 5) \cdot c(c + 3)} = \frac{c + 3}{c^2 - 5c}.$$

Упражнения

107. Выполните деление:

а) $\frac{3x}{4y}:\frac{9x^2}{8y^2}$; в) $\frac{a^3}{4b^3}:\frac{2b^2}{3a^2}$; д) $\frac{13x}{b^2}:(169bx)$;

б) $\frac{5x^2}{6y^2}:\frac{9x^2}{8y^2}$; г) $\frac{2c^2}{121y}:\frac{1}{33y^2}$; е) $144a^2:\frac{24a^3}{5b}$.

108. Выполните действия (n — натуральное число, большее 6):

а) $\frac{3a^n}{4b^{2n+2}}:\frac{6a^{n-2}}{b^{2n}}$; в) $\frac{15a^{3n-1}\cdot b^n}{7c^{5n+1}\cdot d}:\frac{6a^{2n-3}\cdot b^{n-1}}{35c^{4n+1}\cdot d^n}$;

б) $\frac{x^{3n+5}}{y^{3n-2}}:\frac{x^{2n+6}}{y^{4n}}$; г) $\frac{x^{n+8}\cdot y^{n-5}}{p^{2n+9}\cdot q^{3n-1}}:\frac{x^{n+6}\cdot y^{n-7}}{p^{n+10}\cdot q^{2n}}$.

109. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{7a^2x^2}{4y^3}:\frac{35a^3x^3}{8y^4}$; в) $\frac{42x^6}{17y^6}:\left(-\frac{21x^5}{51y^5}\right)$; д) $\frac{48x^{12}}{y^{16}}:(-16x^{10}y^4)$;

б) $-\frac{9ac}{13b}:\frac{18ab}{52c}$; г) $-\frac{p^{10}}{q^{10}}:\frac{3p^5}{2q^5}$; е) $\frac{37a^8b}{c^3}:\left(-\frac{111a^7b^2}{c^2}\right)$.

110. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{a-b}{c}:\frac{2a-2b}{c^2}$; г) $(x^2-y^2):\frac{5x+5y}{2xy}$;

б) $\frac{a^2-b^2}{4c^2}:\frac{a+b}{8c}$; д) $\frac{81a^2-49b^2}{ab}:(9a-7b)$;

в) $\frac{a^2+ab}{ab-b^2}:\frac{ab+b^2}{a^2-ab}$; е) $(7a^3+875):\frac{21a^3-105a^2+525a}{2a+10}$.

111. Упростите выражение:

а) $\frac{16n^2}{n^2-2n}:\frac{8n}{3n-6}$; г) $\frac{6a+12b}{a^2-2ab+b^2}:\frac{4a+8b}{a^2-b^2}$;

б) $\frac{x^2-1}{6x^2}:\frac{x^2+x}{3}$; д) $\frac{p^2+pq+q^2}{pq+3q^2}:\frac{p^3-q^3}{p^2-3pq}$;

в) $\frac{x-4}{y^2-xy}:\frac{5x-20}{x^2-xy}$; е) $\frac{a^3-8b^3}{a^2-3ab}:\frac{3a^2+6ab+12b^2}{3b^2-ab}$.

112. Найдите значение выражения:

а) $\frac{x^2+x+1}{4x+1}:\frac{x^3-1}{16x^2-1}$, если $x=\frac{1}{2}$;

б) $\frac{y^3-2y^2-3y+6}{4y^2+4y+1}:\frac{5y^2-15}{4y+2}$, если $y=-\frac{1}{2}$.

113. Упростите выражение:

а) $\frac{12a^4}{7b^2} \cdot \frac{3a^2}{2b^3} : \frac{18a^5}{35b^4}$; в) $\frac{x^2 - y^2}{xy} \cdot \frac{6x^2}{x + y} : \frac{12x - 12y}{5y^2}$;

б) $\frac{9x^6}{8y^6} : \frac{6x^4}{7y^4} \cdot \frac{y^3}{14x^3}$; г) $\frac{(x - y)^2}{x + 2y} : \frac{(x - y)^3}{x^2 - 4y^2} \cdot \frac{x - y}{x - 2y}$.

114. Выполните деление:

а) $\frac{x^2 - bx + ax - ab}{x^2 + bx - ax - ab} : \frac{x^2 + bx + ax + ab}{x^2 - bx - ax + ab}$; в) $\frac{a^2 - 10a + 21}{b^2 + 11b + 30} : \frac{a^2 - 49}{b^2 - 36}$;

б) $\frac{y^3 - 5y^2 - 4y + 20}{y^3 + 5y^2 + 4y + 20} : \frac{(y + 2)^2 - 4y - 8}{(y - 2)^2 + 4y}$; г) $\frac{a^4 - 16}{b^6 - 8} : \frac{2a^2 + 8}{(b^2 + 2)^2 - 2b^2}$.

115. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{x^2 - 10x + 24}{x^2 - 2x - 24}\right)^3 : \left(\frac{4x - x^2}{5x + 20}\right)^3$;

б) $\left(\frac{y^2 - 5y + 6}{y^2 + 5y - 6}\right)^6 : \left(\frac{y^2 - 6y + 9}{y^2 + 12y + 36}\right)^3$.

116. Упростите выражение $\frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) \cdot \left(\frac{a + b}{2a} - \frac{b}{a + b}\right)}{\left(a + 2b + \frac{b^2}{a}\right) \cdot \left(\frac{a}{a + b} + \frac{b}{a - b}\right)}$ и найдите его значение при $a = 0{,}75$, $b = \frac{4}{3}$.

Упражнения для повторения

117. Докажите тождество

$$\left(\frac{a^2 - 16}{a^2 + 8a + 16}\right)^3 \cdot \left(\frac{0{,}5a + 2}{0{,}5a - 2}\right)^3 = 1.$$

118. От станции до озера одну часть пути турист шёл со скоростью 4 км/ч, а оставшуюся часть пути, которая на 1 км больше первоначальной, — со скоростью 6 км/ч. Каково расстояние от станции до озера, если известно, что на весь путь турист затратил 1 ч 25 мин?

119. Из равенства $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ выразите:

а) переменную c через переменные a и b;

б) переменную a через переменные b и c.

7. Преобразование рациональных выражений

В курсе алгебры 7 класса было показано, что сумму, разность и произведение многочленов всегда можно представить в виде многочлена. Дробь, у которой числитель и знаменатель — многочлены, называют *рациональной дробью*. В этом курсе мы показали, что имеют место тождества:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd},\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Значит, сумму, разность, произведение и частное рациональных дробей всегда можно представить в виде рациональной дроби. Следовательно, в виде рациональной дроби можно представить любое рациональное выражение.

Пример 1. Представим в виде рациональной дроби выражение

$$\left(\frac{2a+1}{2a-1}-\frac{2a-1}{2a+1}\right):\frac{8a}{6a^2-3a}.$$

Сначала выполним действие в скобках, а затем полученное выражение разделим на дробь $\frac{8a}{6a^2-3a}$:

1) $\frac{2a+1}{2a-1}-\frac{2a-1}{2a+1}=\frac{(2a+1)^2-(2a-1)^2}{4a^2-1}=\frac{8a}{4a^2-1}$;

2) $\frac{8a}{4a^2-1}:\frac{8a}{6a^2-3a}=\frac{8a\cdot 3a(2a-1)}{(2a-1)(2a+1)\cdot 8a}=\frac{3a}{2a+1}$.

Запись можно вести короче:

$$\left(\frac{2a+1}{2a-1}-\frac{2a-1}{2a+1}\right):\frac{8a}{6a^2-3a}=\frac{(2a+1)^2-(2a-1)^2}{(2a-1)(2a+1)}:\frac{8a}{3a(2a-1)}=$$

$$=\frac{8a\cdot 3a(2a-1)}{8a(2a-1)(2a+1)}=\frac{3a}{2a+1}.$$

При выполнении преобразований выражений вида $(a+b)\cdot c$ иногда бывает более рациональным не выполнять действия в скобках, а сразу воспользоваться распределительным свойством умножения.

Пример 2. Упростим выражение

$$\left(\frac{1}{(a-b)^2}-\frac{1}{(a+b)^2}\right)\cdot(a^2-b^2)^2.$$

Воспользуемся распределительным свойством умножения, предварительно представив второй множитель в виде произведения $(a-b)^2(a+b)^2$.

Имеем:

$$\left(\frac{1}{(a-b)^2}-\frac{1}{(a+b)^2}\right)\cdot(a^2-b^2)^2=$$

$$=\frac{(a-b)^2(a+b)^2}{(a-b)^2}-\frac{(a-b)^2(a+b)^2}{(a+b)^2}=(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$$

Пример 3. Упростим выражение

$$\frac{4a+5}{2a}-\frac{4a^2+4a+1}{a^2-9}\cdot\frac{a+3}{2a+1}.$$

Сначала выполним умножение, затем полученный результат вычтем из дроби $\frac{4a+5}{2a}$:

1) $\frac{4a^2+4a+1}{a^2-9}\cdot\frac{a+3}{2a+1}=\frac{(2a+1)^2\cdot(a+3)}{(a-3)(a+3)(2a+1)}=\frac{2a+1}{a-3};$

2) $\frac{4a+5}{2a}-\frac{2a+1}{a-3}=\frac{(4a+5)(a-3)-2a(2a+1)}{2a(a-3)}=\frac{4a^2+5a-12a-15-4a^2-2a}{2a(a-3)}=$

$=\frac{-9a-15}{2a^2-6a}=-\frac{9a+15}{2a^2-6a}.$

Пример 4. Докажем, что значение выражения

$$1+\frac{x^3+1}{x^2-x}:\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)$$

при любых допустимых значениях x положительно.

Преобразуем данное выражение:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-2x+1}=\frac{x^2-2x+1+x}{x(x-1)^2}=\frac{x^2-x+1}{x(x-1)^2};$

2) $\frac{x^3+1}{x^2-x}:\frac{x^2-x+1}{x(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)\cdot x(x-1)^2}{x(x-1)(x^2-x+1)}=x^2-1;$

3) $1+x^2-1=x^2.$

Выражение x^2 при любых x — неотрицательное число. Однако число нуль не является допустимым значением переменной x. Следовательно, значение данного выражения положительно при любом допустимом значении x.

Рассмотрим преобразования дробей, числитель и знаменатель которых являются дробными выражениями. Такие дроби обычно называют сложными («многоэтажными») дробями.

Пример 5. Представим в виде рациональной дроби дробь:

а) $\dfrac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}};$ б) $\dfrac{a+\dfrac{bc}{b+c}}{b+\dfrac{ac}{a+c}}.$

а) Числитель и знаменатель этой дроби являются дробями, которые имеют один и тот же общий знаменатель

$$(1-x+x^2)(1+x+x^2).$$

Поэтому, умножив числитель и знаменатель данной дроби на выражение $(1 + x + x^2)(1 - x + x^2)$, мы получим дробь, тождественно равную данной, у которой числитель и знаменатель являются целыми выражениями.

Имеем:

$$\frac{\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1+x}{1+x+x^2}}{\frac{1+x}{1+x+x^2}-\frac{1-x}{1-x+x^2}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1+x}{1+x+x^2}\right)\cdot(1-x+x^2)(1+x+x^2)}{\left(\frac{1+x}{1+x+x^2}-\frac{1-x}{1-x+x^2}\right)\cdot(1-x+x^2)(1+x+x^2)}=$$

$$=\frac{1-x^3+(1+x^3)}{1+x^3-(1-x^3)}=\frac{2}{2x^3}=\frac{1}{x^3}.$$

б) В этом случае целесообразно выполнить преобразования отдельно в числителе и знаменателе дроби, а затем первый результат разделить на второй. Имеем:

$$\frac{a+\frac{bc}{b+c}}{b+\frac{ac}{a+c}}=\frac{\frac{ab+ac+bc}{b+c}}{\frac{ab+bc+ac}{a+c}}=\frac{ab+ac+bc}{b+c}:\frac{ab+bc+ac}{a+c}=$$

$$=\frac{(ab+ac+bc)(a+c)}{(b+c)(ab+bc+ac)}=\frac{a+c}{b+c}.$$

Упражнения

120. Представьте в виде рациональной дроби выражения:

а) $\left(\frac{a}{a+2}+1\right)\cdot\frac{a+2}{4a}$;

б) $\left(\frac{2b}{1-b}-b\right):\frac{3b+3}{b-1}$;

в) $\frac{3x^2}{x^2-1}:\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$;

г) $\frac{2y-12}{y^2-25}\cdot\left(y+\frac{y}{y-6}\right)$;

д) $\left(a-x+\frac{x^2}{a+x}\right)\cdot\frac{a-x}{a}$;

е) $\left(2b+y-\frac{3y^2}{2b-y}\right)\cdot\frac{6b-3y}{b^2+by}$.

121. Выполните действия:

а) $\left(a-\frac{a^2}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b^2}-\frac{1}{a}\right)$;

б) $\left(\frac{b}{c}+\frac{b^2}{c^2}\right):\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)$;

в) $\left(x-\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)\cdot\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{x-y}\right)$;

г) $\left(\frac{2z}{2-z}-\frac{z}{2}\right):\left(1+\frac{z^2+4}{2z-4}\right)$;

д) $\left(a-1-\frac{3}{a+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a^2-4}\right)$;

е) $\left(b+1-\frac{1}{1-b}\right):\left(b-\frac{b^2}{b-1}\right)$.

122. Упростите выражение:

а) $\frac{xy+2x}{7}:\frac{x^3}{7y+14}-\frac{2y+3}{x^2}$;

б) $\frac{2a-b}{2a}-\frac{3b}{4a^2}\cdot\frac{4a^2-2ab}{3b}$;

в) $\frac{m^2-n^2}{5n^2}\cdot\frac{10n^2}{m^4-m^2n^2}-2$;

г) $\frac{2pq}{2p-q}-\frac{4p^2-2pq+q^2}{2p+q}\cdot\frac{2p+q}{2p-q}$.

123. Выполните действия:

а) $(a^2-x^2)\cdot\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a^2-x^2}-\frac{1}{a-x}\right)$;

б) $\frac{by}{b^2-y^2}:\left(\frac{1}{b^2-y^2}+\frac{1}{b^2+2by+y^2}\right)$;

в) $\left(x^2+\frac{27}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x^2-3x+9}\right)$;

г) $\left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+5\right)$;

д) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right)$;

е) $\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}\right)\cdot\left(x-\frac{3x+y}{4}\right)$.

124. Упростите выражение:

а) $\frac{x-1}{3x}:\left(\frac{1}{3x-6y}\cdot\left(2y-x-\frac{2y-x}{x}\right)\right)$;

б) $\left(3a-2b+\frac{2b-3a}{2a}\right):\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{a^2}{9a^2-4b^2}$;

в) $\frac{4y^2-1}{y^3-y^2-y+1}:\left(\frac{y}{y^2-2y+1}+\frac{y}{y^2-1}-\frac{2}{y+1}\right)$;

г) $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x+1}{x(x-1)^2}\right)\cdot\frac{x-1}{x^3+1}$.

125. Докажите, что при любых допустимых значениях переменной x значение выражения не зависит от x:

а) $\left(2+\frac{x^2}{x+2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}-\frac{2}{x^2+2x+4}\right)$;

б) $\left(\frac{6}{2-x}-\frac{6x}{8-x^3}\cdot\frac{x^2+2x+4}{x+2}\right)-\frac{3x^2}{4-x^2}$.

126. Докажите тождество:

а) $\left(a-\frac{4ab}{a+b}+b\right):(a-b)+1=\frac{2a}{a+b}$;

б) $\left(\frac{1}{(a-2)^2}-\frac{2}{a^2-4}+\frac{1}{(a+2)^2}\right)\cdot(a^2-4)^2=16$;

в) $\left(\frac{a-0{,}2b}{5a^2+ab+0{,}2b^2}+\frac{0{,}6ab}{5a^3-0{,}04b^3}+\frac{0{,}2}{a-0{,}2b}\right)\cdot\frac{5a-b}{2}=1$;

г) $\left(\frac{9}{(x+3)^2}+\frac{18}{x^2-9}+\frac{9}{(x-3)^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^2=4$.

127. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{y+1}{y^3-4y^2+4y-1}-\frac{y-1}{y^3-2y^2-2y+1}\right):\frac{4}{y^2-3y+1}$;

б) $\left(\frac{4x^2+8}{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}-\frac{4-x^2}{(x-1)^2}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$.

128. Представьте в виде рациональной дроби выражения:

а) $\dfrac{\frac{2a-b}{b}+1}{\frac{2a^2+b}{b}-1}$; б) $\dfrac{\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}}{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}}$; в) $\dfrac{1-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}-2}$; г) $\dfrac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+x+3\left(\frac{1}{x}+1\right)}$.

129. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\left(\frac{a^3}{(b-1)^3}+1\right)\left(\frac{a}{b-1}-1\right)}{\left(\frac{a^2}{(b-1)^2}-1\right)\left(\frac{a^2}{(b-1)^2}-\frac{a}{b-1}+1\right)}=1$; б) $\dfrac{\frac{x^6+y^6}{x^3y^3}\cdot\left(\frac{x^3}{y^3}-\frac{y^3}{x^3}\right)}{\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}+1}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{x^2}{y^2}$.

130. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{x^2-9}{2}\cdot\left(\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}\right)$.

131. Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{4}{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2+\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}$.

Упражнения для повторения

132. Докажите, что если $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, то верно равенство:

а) $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2}{b^2}$; б) $\left(\frac{a+b}{b+c}\right)^2=\frac{a}{c}$.

133. Моторная лодка прошла против течения реки 16 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 40 мин меньше, чем на путь против течения. Скорость течения реки 2 км/ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте правило умножения дробей. Приведите пример.

2. В чём состоит правило возведения дроби в степень?

3. Сформулируйте правило деления одной дроби на другую. Приведите пример.

4. Представьте выражение $\frac{2x^3+8x}{(x^2-4)^3}:\left(\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}\right)$ в виде рациональной дроби.

5. Почему любое рациональное выражение можно представить в виде многочлена или рациональной дроби?

Дополнительные упражнения к главе 1

К параграфу 1

134. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{2\frac{6}{7}\cdot 0{,}35}{16\frac{2}{5}:6\frac{5}{6}}$; б) $\dfrac{\frac{5}{6}\cdot 1{,}2+31}{7{,}2\cdot\frac{5}{9}}$; в) $\dfrac{37^2+111}{40}$; г) $\dfrac{395+79^2}{84}$.

135. Найдите значение дроби:

а) $3-\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{1-\dfrac{2}{1+\frac{2}{1}}}}$; б) $1+\dfrac{3}{1-\dfrac{3}{1+\frac{3}{1}}}$.

136. При каких целых значениях n дробь принимает целые значения:

а) $\dfrac{91}{3n+5}$; в) $\dfrac{159}{6n+1}$; д) $\dfrac{5}{n^2-4}$;

б) $\dfrac{123}{4n-1}$; г) $\dfrac{205}{7n+2}$; е) $\dfrac{6}{n^2-3}$?

137. При каких значениях переменной имеет смысл дробь:

а) $\dfrac{1}{x^3-9x}$; в) $\dfrac{8}{|x|-2}$; д) $\dfrac{\frac{2}{x}-6}{3-\frac{9}{x}}$;

б) $\dfrac{1}{x^5-16x}$; г) $\dfrac{45}{|x|+5}$; е) $\dfrac{\frac{1}{x-2}}{|x|-x}$?

138. Найдите область определения функции:

а) $y=\dfrac{x}{x^2-49}$; б) $y=\dfrac{1}{x^3-16x}$; в) $y=\dfrac{7}{|x|-x}$.

139. При каких значениях a значение дроби равно нулю:

а) $\dfrac{a^2-169}{a}$; б) $\dfrac{|a|-5}{3}$; в) $\dfrac{a-|a|}{7}$?

140. Зная, что a, b, c и d — отличные от нуля числа и $ad = bc$, докажите, что:

а) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$; в) $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$; д) $\dfrac{b}{a+nb}=\dfrac{d}{c+nd}$;

б) $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$; г) $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a}{b}$; е) $\dfrac{2a+b}{2c+d}=\dfrac{a}{c}$.

Замечание. Последнюю пропорцию доказал Архимед в III в. до н. э.

Архимед (около 287—212 гг. до н. э.) — древнегреческий математик и физик; развил методы вычисления площадей различных фигур и объёмов тел, а также методы касательных и экстремумов, предвосхитив интегральное и дифференциальное исчисления; широко применял математические методы в естествознании и технике.

141. Сократите дробь:

а) $\dfrac{(x+1)^3+1}{x^3-1}$; в) $\dfrac{a^4+a^2+1}{(a+1)^3+1}$; д) $\dfrac{a^2+3ab-2ac-6bc}{a^2-3ab-2ac+6bc}$;

б) $\dfrac{(y-1)^3-1}{y^3+1}$; г) $\dfrac{b^8-b^5-b^3+1}{b^6-b^5-b+1}$; е) $\dfrac{b^2-bx-6by+6xy}{b^3-12b^2y+36by^2}$.

142. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^4+a^2+1}{a^8+a^4+1}$; б) $\dfrac{b^8+4}{(b^4+2b^2+2)(b^4-2b^2+2)}$.

143. Докажите, что если у дроби $\dfrac{2x^2-5xy+7y^2}{3x^2+6xy-8y^2}$ переменные x и y заменить соответственно на kx и ky, где $k \neq 0$, то получится дробь, тождественно равная первоначальной.

144. Найдите ошибку в рассуждениях.
Пусть дано уравнение $x - a = 0$. Разделив обе его части на $x - a$, получим $\dfrac{x-a}{x-a} = \dfrac{0}{x-a}$, откуда сразу же получаем равенство $1 = 0$.

145. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{a^2-3ab+2b^2}{a^2+5ab-4b^2}$ при $a = \dfrac{3}{8}$ и $b = \dfrac{5}{8}$;

б) $\dfrac{2x^3+3x^2y+5xy^2+y^3}{(2x+8y)^3}$ при $x = \dfrac{1}{13}$ и $y = \dfrac{2}{13}$.

146. Известно, что a и c — натуральные числа и $b = a + c$. Найдите значение дроби $\dfrac{10a+c}{100a+10b+c}$.

147. Докажите, что функция $y = \dfrac{2x^3-3x^2+4x-6}{x^2+2}$ является линейной функцией.

148. Докажите тождество $\frac{0{,}5x^2 - xy}{0{,}25x^2 - y^2} = \frac{2x}{x + 2y}$.

149. Найдите значение дроби $\frac{a + 0{,}1b}{10a^2 + 2ab + 0{,}1b^2}$, если известно, что:

а) $10a + b = 20$; б) $2a + 0{,}2b = 5$.

150. Постройте график функции:

а) $y = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$; б) $y = \frac{|x - 2|}{x - 2}$.

К параграфу 2

151. Выполните сложение или вычитание:

а) $\frac{x^{3n} - 9}{x^{2n} + 4x^n - 21} - \frac{18}{x^{2n} + 4x^n - 21}$;

б) $\frac{a^{2n} + 1}{a^{2n} - a^n - 20} + \frac{26}{20 + a^n - a^{2n}}$;

в) $\frac{4a^{2n+1} - 5a^{n+1}b^n}{(2a^n - 3b^n)^3} - \frac{-7a^{n+1}b^n + 9ab^{2n}}{(3b^n - 2a^n)^3}$;

г) $\frac{a^{2n} - b^{2n}}{a^n + b^n - 1} - \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n - 1}$.

152. Упростите выражение $\frac{(a + b)^2}{a + b + c} - \frac{(b - c)^2 + 2bc}{a + b + c} + \frac{(c + a)^2}{a + b + c}$.

153. Докажите тождество $\frac{1}{a^2 + 2ab - 3b^2} + \frac{1}{b^2 + 2ab - 3a^2} = \frac{2}{(a + 3b)(3a + b)}$.

154. Найдите значение выражения $\frac{x - 4}{x^2 - 6x + 8} + \frac{3x - 18}{x^2 - 8x + 12}$ при $x = 2{,}5$.

155. Упростите выражение:

а) $\frac{x}{x + 0{,}5y} - \frac{xy - 2x^2}{x^2 - 0{,}25y^2}$;

б) $\frac{xy - 1{,}2y^2}{x^2 - 1{,}2xy} + \frac{x^2 + 0{,}4xy}{xy + 0{,}4y^2}$;

в) $\frac{2a^2 - a}{a^2 - a + \frac{1}{4}} - \frac{2a^2 + a}{a^2 + a + \frac{1}{4}} + \frac{1}{a^2 - \frac{1}{4}}$;

г) $\frac{3b - y}{b^2 - \frac{2}{3}by + \frac{1}{9}y^2} - \frac{3b + y}{b^2 + \frac{2}{3}by + \frac{1}{9}y^2} - \frac{6b}{b^2 - \frac{1}{9}y^2}$.

156. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$;

б) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$;

в) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

157. Представьте дробь $\frac{2}{3}$ в виде суммы трёх дробей со знаменателями:

а) 5, 6 и 10; б) 3, 5 и 15.

158. Найдите значения a, b и c, при которых равенство

$$\frac{x^2-x+1}{(x-1)^3}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{(x-1)^3}$$

является тождеством.

159. Представьте дробь в виде суммы трёх дробей, знаменателями которых являются многочлены первой степени:

а) $\dfrac{3x^2-4}{x^3-4x}$; б) $\dfrac{2y^2-5y+3}{y^3-4y^2+3y}$; в) $\dfrac{3z^2+6z+2}{z^3+3z^2+2z}$.

160. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{x^3+x^2-x+2}{x^2-x+1}$ при $x=-1{,}75$; б) $\dfrac{y^3-y^2-\frac{1}{2}y-\frac{3}{8}}{y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}}$ при $y=2{,}5$.

161. Найдите все целые значения дроби, зная, что $n \in N$:

а) $\dfrac{n^2-4}{n+3}$; в) $\dfrac{n^3-n^2-n+7}{n+1}$;

б) $\dfrac{n^2-3n-15}{n-5}$; г) $\dfrac{(n-1)(n+1)^2-1}{n-1}$.

162. Найдите целые значения a, при которых дробь принимает целые значения:

а) $\dfrac{(a-2)^2}{4a}$; б) $\dfrac{81+\frac{108}{a}+\frac{36}{a^2}}{(3a+2)^2}$.

163. Укажите натуральные значения a и b, при которых верно равенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{3}.$$

164. Ученик, решая уравнение $\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}$, привёл его левую часть к общему знаменателю и получил $\frac{x+5-5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}$. Отсюда он получил равенство $\frac{4x-40}{7-x} = \frac{4x-40}{13-x}$. Далее ученик рассуждал так: поскольку числители дробей равны, то равны и знаменатели, т. е. $7 - x = 13 - x$, откуда $7 = 13$. Какую ошибку допустил ученик?

165. Докажите, что значение выражения

$$\left(\frac{x^{3n}}{x^n-1} + \frac{1}{x^n+1}\right) - \left(\frac{x^{2n}}{x^n+1} + \frac{1}{x^n-1}\right)$$

при целом x, отличном от 1, и натуральном n является натуральным числом.

К параграфу 3

166. Упростите выражение:

а) $\frac{x^5+x^4+x^3}{x^5-x^4+x^3} \cdot \frac{x^5+x^2}{x^5-x^2}$;

б) $\frac{a^2+ax+ab+bx}{a^2-ax-ab+bx} \cdot \frac{a^2-ax-bx+ab}{a^2+ax-bx-ab}$;

в) $\frac{x^4+x^2y^2}{x^2-2x-2y-y^2} \cdot \frac{x^2-xy-2x}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}$;

г) $\frac{10a^2+40ab+40b^2}{a^2-3a+6b-4b^2} \cdot \frac{a^2+2ab-3a}{5a+10b}$.

167. Выполните умножение:

а) $\frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{4x^2+2y-4} \cdot \frac{6xy}{4x^2+2y+4}$;

б) $\frac{9a^2-6ab^2+b^4-9}{12(a+1)-4b^2} \cdot \frac{12ab}{3(a-1)-b^2}$.

168. Упростите выражение:

а) $\left(x^2+\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x+\frac{1}{x}-1}$;

б) $\left(y^2-\frac{8}{y}\right) \cdot \frac{1}{y+\frac{4}{y}+2}$;

в) $\frac{x^3y^3}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^3+y^3} \cdot \left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}\right)$;

г) $\frac{x^4y^3+x^3y^4}{(x+y)^2-xy} \cdot \left(\frac{1}{y^3}-\frac{1}{x^3}\right)$.

169. Докажите, что если a, b и c отличны от нуля, то равенство верно:

а) $\frac{(a+b)^2}{(b+c)^2} = \frac{a^2}{b^2}$ при условии, что $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$;

б) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ при условии, что $(a + b)(b + c) = 0$.

170. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x^2-30yz+10xz-3xy}{z^2-xz}:\dfrac{x^2-100z^2}{x^2-xz}$;

б) $\dfrac{a^6-b^6}{a^2+a-3b-9b^2}:\dfrac{(a^2+b^2)^2-a^2b^2}{a-3b}$;

в) $\dfrac{6xy-4x-9y+6}{x^2-12x+36}:\dfrac{9y^2-12x+4}{3xy-18y-2x+12}$.

171. Зная, что $a+b+c=0$, найдите значение выражения:

а) $\dfrac{a+2b+c}{a+8b+c}:\dfrac{2a+4b-3c}{3a+7b-7c}$; б) $\dfrac{3a+5b-7c}{4a+5b-6c}:\dfrac{2a+b+c}{7a+b+c}$.

172. Представьте в виде дроби:

а) $\left(\dfrac{4a^2-12ab+9b^2}{4a^2+12ab+9b^2}\right)^4:\left(\dfrac{\frac{1}{3}a^2-ab+\frac{3}{4}b^2}{\frac{1}{3}a^2+ab+\frac{3}{4}b^2}\right)^3$; б) $\left(\dfrac{0{,}2a^2+ab}{0{,}2b^2+ab}\right)^6:\left(\dfrac{a^2+10ab+25b^2}{25a^2+10ab+b^2}\right)^3$.

173. Докажите тождество

$$2\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}.$$

174. Упростите выражение:

а) $\left(a+\dfrac{a-b}{a+b}-b\right):\left(\dfrac{2a+1}{a^2-b^2}+1\right)$;

б) $\left(x-\dfrac{x+y}{x-y}+y\right):\left(1-\dfrac{2y+1}{x^2-y^2}\right)$;

в) $\dfrac{2cd}{2c+d}\cdot\left(\dfrac{2c+d}{2c-d}-2c-d\right)+2cd$;

г) $\dfrac{18xy^2}{3y-2x}+\dfrac{2x}{2x-3y}\cdot\left(9y^2-6xy+\dfrac{9y^2-6xy}{4x^2-6xy}\right)$.

175. Докажите, что при любом натуральном n является натуральным числом значение выражения:

а) $\left(\dfrac{1}{n}+1\right)\left(n+\dfrac{1}{n}-1\right):\dfrac{1}{n^2}$; б) $\left(\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{n}{2}\right):\left(\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2}\right)$.

176. Докажите, что если $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{x_2}{x_3}=\dfrac{x_3}{x_4}$, то:

а) $\dfrac{x_1+x_2+x_2}{x_2+x_3+x_4}=\dfrac{x_1}{x_2}$; б) $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{x_2+x_3+x_4}\right)^3=\dfrac{x_1}{x_4}$.

177. Докажите, что при любом m, отличном от нуля, значение выражения

$$\left(2m^2+\frac{1}{2m^2-1}+1\right):\left(2m^2-\frac{4m^4}{2m^2-1}\right)$$

является отрицательным числом.

178. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{0{,}5b-1{,}5}{0{,}5b^2-1{,}5b+4{,}5}-\dfrac{2b-6}{\frac{1}{3}b^3+9}\right):\dfrac{b-3}{0{,}8b^3+21{,}6}$;

б) $\left(\dfrac{a}{0{,}5a+1}+\dfrac{\frac{2}{3}a}{2-a}+\dfrac{2a}{\frac{1}{4}a^2-1}\right)\cdot\dfrac{0{,}5a-1}{0{,}5a+1}$;

в) $\left(\dfrac{3{,}6xy-2{,}1y^2}{1{,}44x^2-0{,}49y^2}+\dfrac{2x}{2{,}4x+1{,}4y}\right)\cdot\dfrac{12x^2+7xy}{x+3y}$;

г) $\left(\dfrac{1}{0{,}5x+y}-\dfrac{2y}{0{,}25x^2+xy+y^2}\right):\left(\dfrac{0{,}5x}{0{,}25x^2-y^2}+\dfrac{1}{2y-x}\right)+2$.

179. Представьте в виде рациональной дроби:

а) $\dfrac{x-\dfrac{yz}{y-z}}{y-\dfrac{xz}{x-z}}$;

в) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$;

б) $\dfrac{\dfrac{a-x}{a}+\dfrac{x}{a-x}}{\dfrac{a+x}{a}-\dfrac{x}{a+x}}$;

г) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{y}}}}$.

180. Выполните подстановку и упростите полученное выражение:

а) $\dfrac{ax}{a+x}-\dfrac{bx}{b-x}$, где $x=\dfrac{ab}{a-b}$;

б) $\dfrac{\dfrac{a}{b}-x}{\dfrac{b}{a}+x}$, где $x=\dfrac{a-b}{a+b}$.

181. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{z-2}{6z+(z-2)^2}+\dfrac{(z+4)^2-12}{z^3-8}-\dfrac{1}{z-2}\right):\dfrac{z^3+2z^2+2z+4}{z^3-2z^2+2z-4}$;

б) $\left(\dfrac{bx+4+\dfrac{4}{bx}}{2b+(b^2-4)x-2bx^2}+\dfrac{(4x^2-b^2)\cdot\dfrac{1}{b}}{(b+2x)^2-8bx}\right)\cdot\dfrac{bx}{2}$.

Глава 2 Целые числа. Делимость чисел

В этой главе будут рассмотрены некоторые свойства множества натуральных чисел и множества целых чисел, свойства делимости целых чисел, признаки делимости, простые и составные числа. Вместе с вопросами теории делимости будут затронуты вопросы теории множеств — объединение и пересечение множеств, взаимно однозначное соответствие.

§ 4. Множество натуральных и множество целых чисел

8. Пересечение, объединение и разность множеств

В курсе математики 7 класса вы познакомились с понятиями: множество, элемент множества, подмножество данного множества.

Напомним, что множества бывают конечные и бесконечные. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством*. Пустое множество обозначается знаком $\varnothing$. Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то множество B называют *подмножеством* множества A и пишут: $B \subset A$.

Если $B \subset A$, $B \neq A$, $B \neq \varnothing$, то B называют собственным подмножеством множества A.

Остановимся теперь на понятиях пересечения и объединения множеств.

Пусть A — множество простых двузначных чисел, B — множество двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 1:

$A = \{11; 13, 17, 19, ..., 79, 83, 89, 97\}$,

$B = \{11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91\}$.

Рассмотрим множество C, составленное из общих элементов этих множеств. Общими элементами множеств A и B являются простые двузначные числа, оканчивающиеся цифрой 1, т. е.

$$C = \{11, 31, 41, 61, 71\}.$$

Говорят, что множество C является *пересечением* множеств A и B.

На рисунке 2 множества A и B изображены с помощью кругов Эйлера. Фигура, выделенная на этом рисунке цветом, изображает пересечение множеств A и B.

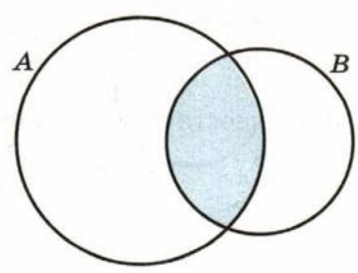


Рис. 2

Определение. **Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из всех общих элементов этих множеств.**

Пересечение множеств A и B обозначают так: $A \cap B$.

Из определения следует, что пересечение множеств A и B содержит те и только те элементы, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B, т. е. любой элемент x, принадлежащий пересечению множеств A и B, обладает свойством: $x \in A$ и $x \in B$. Используя задание множества с помощью его характеристического свойства, можно записать:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечением является пустое множество, т. е. в этом случае $A \cap B = \varnothing$. Очевидно, что $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Заметим также, что если $A \subset B$, то $A \cap B = A$, а если $B \subset A$, то $A \cap B = B$ (рис. 3).

Вернёмся к рассмотренным множествам A и B, где A — множество простых двузначных чисел, B — множество двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 1. Рассмотрим теперь множество K, которому принадлежат все элементы множества A и все элементы множества B. Множество K составлено из всех двузначных чисел, которые являются простыми или оканчиваются цифрой 1, т. е.

$$K = \{11, 13, 17, 19, 21, ..., 83, 89, 91, 97\}.$$

Говорят, что множество K является *объединением* множеств A и B.

На рисунке 4 множества A и B изображены с помощью кругов Эйлера. Фигура, выделенная на рисунке цветом, изображает объединение множеств A и B.

Определение. **Объединением двух множеств называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств.**

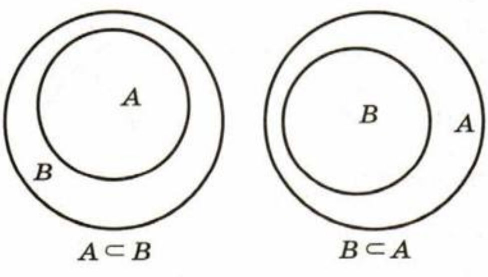


Рис. 3

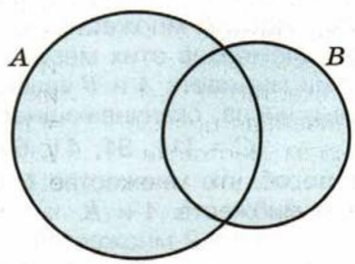


Рис. 4

Объединение множеств A и B обозначается так: $A \cup B$.

Из определения следует, что объединение множеств A и B содержит те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств, т. е. любой элемент x из множества $A \cup B$ обладает свойством: $x \in A$ или $x \in B$. Это можно записать так:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Очевидно, что $A \cup \varnothing = A$, $A \cup A = A$.

Заметим также, что если $A \subset B$, то $A \cup B = B$, а если $B \subset A$, то $A \cup B = A$.

Приведём примеры.

Пример 1. Найдём пересечение и объединение множеств цифр, которые встречаются в записи чисел 162 655 и 255 424.

Пусть P — множество цифр, которые используются в записи первого числа, а L — множество цифр, которые используются в записи второго числа. Тогда

$$P = \{1, 2, 5, 6\},$$
$$L = \{2, 4, 5\}.$$

Пересечением множеств P и L является множество M, составленное из цифр, которые встречаются в записи обоих чисел, т. е.

$$M = \{2, 5\}.$$

Объединением множеств P и L служит множество F, которому принадлежат все цифры, использованные при записи как первого, так и второго числа. Чтобы задать множество F перечислением элементов, выпишем сначала все элементы множества P, а затем припишем к ним недостающие элементы из множества L. Получим, что

$$F = \{1, 2, 5, 6, 4\}.$$

Пример 2. Найдём пересечение и объединение множеств C и D, если C — множество точек $(x; y)$, где x — любое число, $2 \leqslant y \leqslant 3$, а D — множество точек $(x; y)$, где $1 \leqslant x \leqslant 4$, y — любое число.

Множество C — горизонтальная полоса, ограниченная прямыми $y = 2$ и $y = 3$, а множество D — вертикальная полоса, ограниченная прямыми $x = 1$ и $x = 4$. Пересечением множеств C и D служит множество их общих точек, т. е. прямоугольник, образованный при пересечении этих полос. Объединением множеств C и D служит множество, состоящее из всех точек горизонтальной полосы и всех точек вертикальной полосы (рис. 5).

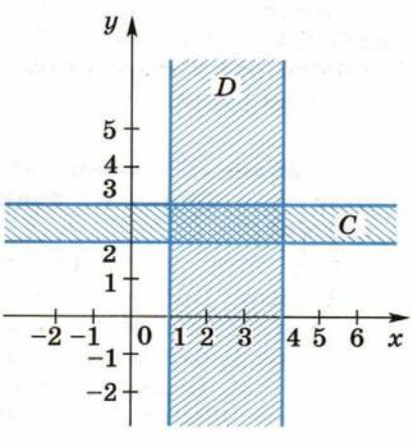


Рис. 5

Выясним теперь, как связаны между собой число элементов двух конечных множеств и число элементов их пересечения и объединения.

Пусть A и B — некоторые конечные множества, $n(A)$ и $n(B)$ — число элементов этих множеств, $n(A \cap B)$ и $n(A \cup B)$ — <u>*число элементов пересечения и объединения множеств*</u>.

Если множества A и B не имеют общих элементов, т. е. $A \cap B = \varnothing$, то очевидно, что

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Если же $A \cap B \neq \varnothing$, то, как видно из рисунка 2, в сумму $n(A) + n(B)$ дважды входит число элементов их пересечения, т. е. $n(A \cap B)$. Следовательно, в этом случае

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Заметим, что эта формула включает и первый случай, когда $A \cap B = \varnothing$, так как в этом случае $n(A \cap B) = 0$.

Пример 3. В туристическую группу, отправляющуюся в зарубежную поездку, входят 28 человек, каждый из которых владеет английским или немецким языком, причём некоторые владеют обоими языками. Известно, что 18 человек владеют английским языком, а 15 человек — немецким языком. Сколько человек в группе владеет двумя этими языками?

Пусть A — множество туристов, владеющих английским языком, B — множество туристов, владеющих немецким языком. Тогда $n(A) = 18$, $n(B) = 15$, $n(A \cup B) = 28$. Из формулы $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ находим, что

$$28 = 18 + 15 - n(A \cap B), \text{ т. е. } n(A \cap B) = 5.$$

Следовательно, в группе 5 туристов владеют двумя указанными языками.

Наряду с объединением и пересечением в математике используется понятие *разности* двух множеств. Например, если из множества натуральных чисел удалить число 1 и множество всех простых чисел, то оставшаяся часть будет состоять из составных чисел, т. е. составлять множество составных чисел.

Определение. Разностью двух множеств A и B называют множество, состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Разность множеств A и B обозначается так: $A \backslash B$.

Из определения следует, что разность множеств A и B состоит из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, т. е. любой элемент x из множества $A \backslash B$ обладает свойством: $x \in A$ и $x \notin B$. Используя задание множества с помощью его характеристического свойства, можно записать:

$$A \backslash B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

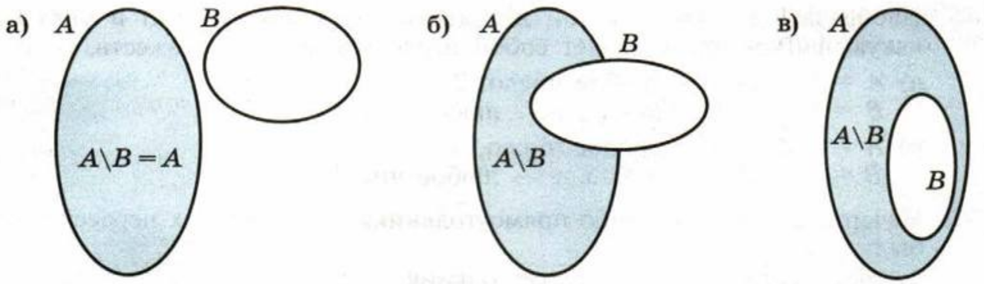


Рис. 6

Очевидно, что $A \setminus \varnothing = A$, $\varnothing \setminus A = \varnothing$, $A \setminus A = \varnothing$.

На рисунках 6 а)—в) множества A и B изображены с помощью кругов Эйлера. Фигуры, выделенные на этих рисунках цветом, в каждом случае изображают множество, являющееся разностью множеств A и B.

Легко видеть, что разность двух множеств A и B является подмножеством множества A, т. е. $A \setminus B \subset A$; что разность не пересекается с вычитаемым, т. е. $A \setminus B \cap B = \varnothing$.

Заметим, что если множество B является подмножеством множества A, то разность $A \setminus B$ <u>называется дополнением множества B до множества A</u> (рис. 6, в).

Упражнения

182. Найдите пересечение, объединение и разность множества цифр, используемых в записи чисел:

а) 122 568 и 325 186;

б) 483 501 и 272 557.

183. Найдите пересечение, объединение и разность множества букв, используемых в записи:

а) слов «меридиан» и «медиана»;

б) пословиц: «Тише едешь — дальше будешь», «Что посеешь, то и пожнёшь».

184. Пусть A — множество простых чисел, B — множество двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 7. Принадлежат ли:

а) пересечению этих множеств числа 37, 47, 57;

б) объединению этих множеств числа 11, 81, 97;

в) разности множеств A и B числа 27, 29, 37;

г) разности множеств A и B числа 27, 37, 103?

185. Пусть A — множество квадратов натуральных чисел, B — множество кубов натуральных чисел. Принадлежат ли:

а) пересечению множеств A и B числа 8, 64, 729;

б) объединению множеств A и B числа 8, 16, 125;

в) разности множеств A и B числа 1, 25, 64?

186. Изобразите в координатной плоскости множества A и B и укажите, какую фигуру представляет собой пересечение этих множеств, если:

а) $A = \{(x; y) | x$ — любое число, $2 \leqslant y \leqslant 5\}$,
$B = \{(x; y) | 2 \leqslant x \leqslant 5, y$ — любое число$\}$;

б) $A = \{(x; y) | x$ — любое число, $3 \leqslant y \leqslant 7\}$,
$B = \{(x; y) | 1 \leqslant x \leqslant 6, y$ — любое число$\}$.

187. Начертите два каких-либо прямоугольника так, чтобы их пересечением был:

а) треугольник; б) шестиугольник.

188. Известно, что A — множество выпускников, окончивших школу с оценкой «5» по физике, а B — множество выпускников, окончивших школу с оценкой «5» по химии. Охарактеризуйте множество:

а) $A \cap B$; в) $A \setminus B$;
б) $A \cup B$; г) $B \setminus A$.

В каком случае $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = A$?

189. Охарактеризуйте пересечение множеств A и B, если:

а) A — множество прямоугольных треугольников, B — множество равнобедренных треугольников;

б) A — множество прямоугольников, B — множество ромбов.

190. В классе 26 учащихся, каждый из которых любит читать фантастику или детективы. Известно, что 19 учеников увлекаются фантастикой, а 14 — детективами. Сколько учащихся этого класса любят читать и фантастику и детективы?

191. В посёлке 56 человек занимаются охотой или рыбной ловлей. Из них 27 человек занимаются охотой, а 47 — рыбной ловлей. Сколько человек в посёлке занимаются и охотой и рыбной ловлей?

192. Из 68 учащихся восьмых классов, писавших контрольную работу по геометрии, каждый решил хотя бы одну из двух предложенных задач. Известно, что 32 ученика решили обе задачи, а 53 ученика решили только первую задачу. Сколько учащихся решили вторую задачу?

193. В офисе туристической фирмы работают сотрудники, каждый из которых знает хотя бы один иностранный язык. 6 человек знают английский, 6 — немецкий, 7 — французский, 4 знают английский и немецкий языки, 3 — немецкий и французский, 2 — французский и английский. Все три языка знает один сотрудник. Сколько человек работают в офисе туристической фирмы? Сколько человек из них знают только английский язык?

194. Староста одной группы института подал в деканат следующие сведения о студентах: «В группе учатся 45 студентов, из которых 25 юношей. 30 студентов учатся на оценки «хорошо» и «отлично», в том числе 16 юношей. 28 студентов занимаются спортом, в том числе 18 юношей и 17 студентов, учащихся на оценки «хорошо» и «отлично». 15 юношей учатся на «хорошо» и «отлично» и при этом занимаются спортом». В предоставленных данных была найдена ошибка. В чём она состоит?

Упражнения для повторения

195. Найдите координаты точки пересечения графиков функций

$$y = -0{,}1x + 0{,}5 \text{ и } y = 0{,}3x + 0{,}1.$$

196. Решите уравнение в целых числах:

а) $3x - 2y = 5$; б) $2x - 3y = 5$.

197. В классе трое учащихся хорошо знают физику, пятеро — английский язык и двое — биологию, причём, среди них нет ни одного ученика, кто хорошо знает более одного из этих предметов. Сколькими способами можно составить команду из трёх человек для участия в интеллектуальном марафоне, если в команде должен быть один человек, хорошо знающий физику, один — английский язык и один — биологию?

9. Взаимно однозначное соответствие

Пусть требуется сравнить число элементов множеств X и Y, где X — множество двузначных чисел, Y — множество трёхзначных чисел, оканчивающихся цифрой 9. С помощью непосредственного подсчёта числа элементов можно установить, что $n(X) = n(Y)$. Однако к этому выводу можно прийти и не прибегая к подсчёту.

Поставим в соответствие каждому двузначному числу $\overline{ab}$ трёхзначное число $\overline{ab9}$. При этом каждое трёхзначное число $\overline{ab9}$ из множества Y окажется соответствующим двузначному числу $\overline{ab}$. Соотношение между множествами X и Y показано с помощью схемы:

$$\begin{array}{cccccc}
10, & 11, & 12, & \ldots, & 98, & 99 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow \\
109, & 119, & 129, & \ldots, & 989, & 999.
\end{array}$$

Говорят, что между множествами X и Y установлено *взаимно однозначное соответствие.*

! Вообще *если каждому элементу множества A поставлен в соответствие единственный элемент множества B и при этом любой элемент множества B оказывается соответствующим некоторому единственному элементу множества A, то говорят, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие.*

Установив в рассмотренном выше примере взаимно однозначное соответствие между множествами X и Y, мы тем самым показали, что $n(X) = n(Y)$.

Приведём теперь пример взаимно однозначного соответствия между бесконечными множествами.

Рассмотрим множество N натуральных чисел и множество P чётных натуральных чисел. Натуральному числу n поставим в соответствие число $2n$. Тогда каждому элементу множества N будет соответствовать единственный элемент множества P. При этом каждый элемент множества P окажется соответствующим для единственного элемента из множества N, так как любое натуральное чётное число можно представить в виде $2n$, где $n \in N$, причём единственным способом. Соотношение между множествами N и P показано на схеме:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2, & 4, & 6, & 8, & \ldots, & 2n, & \ldots. \end{array}$$

Мы показали, что между множествами N и P можно установить взаимно однозначное соответствие. Этот пример может вызвать удивление, так как множество P является собственным подмножеством множества N. Однако из него ясно, что привычные для нас представления, касающиеся конечных множеств, нельзя переносить на бесконечные множества.

Рассмотрим теперь пример взаимно однозначного соответствия между нечисловыми множествами. Пусть даны две окружности с общим центром O (рис. 7). Произвольной точке K внутренней окружности поставим в соответствие точку K' внешней окружности, лежащую на луче OK. Очевидно, что для любой точки внутренней окружности найдётся единственная соответствующая ей точка внешней окружности и, наоборот, любая точка внешней окружности является соответствующей для некоторой точки внутренней окружности. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между множеством точек внутренней окружности и множеством точек внешней окружности.

Установив взаимно однозначное соответствие между множествами точек окружностей, мы тем самым показали, что окружности содержат одинаковое число точек, хотя очевидно, что длина внутренней окружности меньше длины внешней. Этот удивительный факт ещё раз убеждает нас в особенностях соотношений между бесконечными множествами.

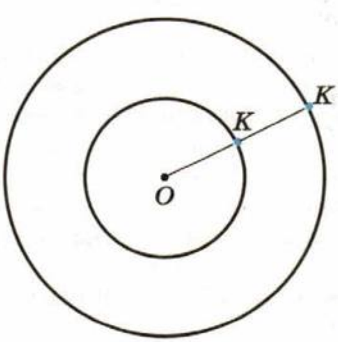


Рис. 7

Упражнения

198. Укажите способ, позволяющий установить взаимно однозначное соответствие между:

а) множеством натуральных чисел и множеством целых отрицательных чисел;

б) множеством всех натуральных чисел и множеством нечётных натуральных чисел.

199. Между какими множествами установлено взаимно однозначное соответствие, если каждой правильной дроби со знаменателем 11 поставлена в соответствие сумма её числителя и знаменателя?

200. Между какими числами устанавливает взаимно однозначное соответствие таблица квадратов двузначных чисел? Для чисел 43; 57; 79 укажите соответствующе им числа. Какому числу соответствует число 729; 3969; 9604?

201. Каждому целому числу поставлен в соответствие его модуль. Является ли взаимно однозначным соответствие между множеством целых чисел и множеством их модулей? Ответ поясните.

202. Укажите способ, позволяющий установить взаимно однозначное соответствие между:

а) множеством натуральных чисел и множеством их квадратов;

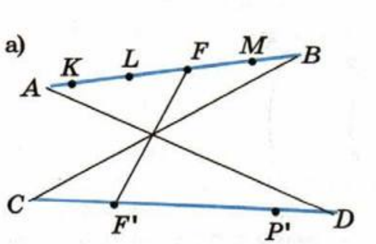
б) множеством всех натуральных чисел и множеством натуральных чисел, больших 5.

203. Укажите способ, позволяющий установить взаимно однозначное соответствие между:

а) множеством чётных натуральных чисел и множеством нечётных натуральных чисел;

б) множеством квадратов натуральных чисел и множеством кубов натуральных чисел.

204. На рисунке 8, *а* показано, как можно установить взаимно однозначное соответствие между множествами точек отрезков AB и CD. Для точек K, L и M найдите соответствующие им точки. Отметьте точку, которой соответствует точка P'.



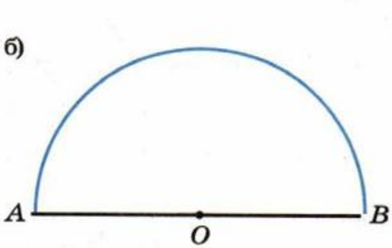


Рис. 8

205. Укажите какой-либо способ, позволяющий установить взаимно однозначное соответствие между множеством точек полуокружности и множеством точек диаметра AB (рис. 8, *б*).

Упражнения для повторения

206. Упростите выражение:

а) $\dfrac{2+\dfrac{x-2y}{y}}{x^2}$; б) $\dfrac{\dfrac{x^2+6y^2}{x^2}-1}{2y^2}$; в) $\dfrac{1-\dfrac{x^2+y^2}{xy}}{x^3+y^3}$.

207. Докажите, что при любом значении x принимает положительные значения квадратный трёхчлен:

а) $x^2 - 18x + 101$;

б) $3x^2 - 12x + 33$.

208. Найдите ординаты общих точек графиков функций:

а) $y = x^2$ и $y = (2 - x)^2$;

б) $y = (x + 2)^2$ и $y = (2x - 1)^2$.

10. Натуральные числа. Целые числа

Числа 1, 2, 3, 4, 5, ..., употребляемые при счёте, называют, как известно, *натуральными числами*.

Каждое натуральное число получается из предыдущего прибавлением единицы, т. е. за каждым натуральным числом n следует число $n + 1$. Каждое натуральное число, отличное от 1, следует за натуральным числом, которое получается из него вычитанием единицы, т. е. натуральное число n, где $n \neq 1$, следует за числом $n - 1$. Исключение составляет число 1, которое не следует ни за каким натуральным числом.

Множество натуральных чисел обычно обозначают, как вы знаете, буквой N (от первой буквы латинского слова *naturalis* — естественный, природный). Множество N бесконечное, в нём есть наименьший элемент — число 1, но нет наибольшего элемента.

Сумма и произведение двух натуральных чисел всегда являются натуральными числами, т. е. на множестве натуральных чисел всегда выполнимы действия сложения и умножения, а именно:

$$\text{если } a \in N \text{ и } b \in N, \text{ то } a + b \in N \text{ и } ab \in N.$$

Иначе обстоит дело с вычитанием и делением. На множестве натуральных чисел эти действия в ряде случаев невыполнимы. Другими словами, уравнения $a + x = b$ и $ax = b$, где $a \in N$, $b \in N$, на множестве натуральных чисел не всегда имеют решения. Например, имея в запасе только натуральные числа, нельзя решить уравнения $8 + x = 3$, $5x = 16$.

Для того чтобы вычитание натуральных чисел было выполнимо во всех случаях, множество натуральных чисел дополняют числом 0 и числами, противоположными натуральным, которые обозначаются так: −1, −2, −3 и т. д. Натуральные числа, противоположные им числа и число 0 составляют *множество целых чисел:*

$$\ldots\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ .$$

Множество целых чисел, как известно, принято обозначать буквой $\boldsymbol{Z}$ (от первой буквы немецкого слова *zahl* — число). Множество $\boldsymbol{Z}$ также является бесконечным, в нём нет ни наименьшего элемента, ни наибольшего. В множестве $\boldsymbol{Z}$ всегда выполнимы действия сложения, вычитания и умножения. В результате выполнения любого из этих действий над целыми числами получается целое число, т. е. если $a \in \boldsymbol{Z}$ и $b \in \boldsymbol{Z}$, то $a + b \in \boldsymbol{Z}$, $a - b \in \boldsymbol{Z}$ и $ab \in \boldsymbol{Z}$.

Однако деление по-прежнему и на множестве $\boldsymbol{Z}$ выполнимо не во всех случаях, т. е. уравнение $ax = b$, где $a \in \boldsymbol{Z}$ и $b \in \boldsymbol{Z}$, не всегда разрешимо в целых числах. Так, на множестве целых чисел не имеет корней уравнение $3x = -11$.

Заметим, что если для любых двух элементов множества K определена некоторая операция (например, сложение) и результат выполнения этой операции также принадлежит множеству K, то говорят, что множество K *замкнуто* относительно этой операции. Так, множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел замкнуто относительно таких операций, как сложение и умножение, а множество $\boldsymbol{Z}$ целых чисел замкнуто относительно трёх операций — сложения, вычитания и умножения.

Множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел является собственным подмножеством множества $\boldsymbol{Z}$ целых чисел. Покажем, что между множествами $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{N}$ можно установить взаимно однозначное соответствие. Для этого будем выписывать целые числа, располагая их следующим образом: на первом месте запишем число 0, а далее будем брать в порядке возрастания натуральные числа и за каждым натуральным числом будем записывать противоположное ему целое число. Получим:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots,\ n,\ -n,\ \ldots,\ \text{где } n \in \boldsymbol{N}.$$

Поставим числу 0 в соответствие число 1, числу 1 — число 2, числу −1 — число 3, числу 2 — число 4 и т. д. Вообще каждому натуральному числу n поставим в соответствие число $2n$, а противоположному ему целому отрицательному числу $-n$ поставим в соответствие число $2n + 1$. Тем самым, каждому целому числу мы поставим в соответствие единственное натуральное число. При этом каждое натуральное число окажется соответствующим вполне определённому целому числу.

Установленное соответствие показано с помощью схемы:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \ldots, & n, & -n, & \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots, & 2n, & 2n+1, & \ldots .
\end{array}$$

Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между множеством Z целых чисел и множеством N натуральных чисел.

Если между множеством M и множеством натуральных чисел N можно установить взаимно однозначное соответствие, то множество M называют *счётным*. Таким образом, мы доказали, что множество целых чисел Z является счётным. В предыдущем пункте было показано, что счётным является множество P чётных натуральных чисел.

Упражнения

209. Не вычисляя значения выражения, определите, является ли оно натуральным числом:

а) $(112{,}8 + 167{,}2) \cdot 17$; в) $175 \cdot (341{,}6 - 248{,}6)$;

б) $(1284 - 1113) : \frac{1}{13}$; г) $2{,}17 \cdot (3 \cdot 1{,}15 - 3{,}45)$.

210. Верно ли утверждение:

а) если $a \in N$, то $a \in Z$; в) если $a \in Z$, то $a \in N$;

б) если $a \notin N$, то $a \notin Z$; г) если $a \notin Z$, то $a \notin N$?

211. Задайте путём перечисления элементов множество A целых чисел x, удовлетворяющих условию:

а) $-4 \leqslant x \leqslant 3{,}7$; в) $|x| \leqslant 5$;

б) $-0{,}8 < x < 0{,}6$; г) $|x + 1| < 4$.

212. На координатной прямой отмечены точки m и $m + 4$, где $m \in Z$ (рис. 9). Отметьте на этой прямой точки с координатами $m - 1$, $m + 1$, $m + 3$, $m - 5$.

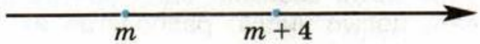


Рис. 9

213. При рассмотрении свойств множества Z целых чисел было показано, каким способом можно пронумеровать все целые числа. Выясните:
а) под каким номером при этом будет записано число 11; −7;
б) какое число будет записано под номером 6; 10.

214. Какое из перечисленных множеств является счётным:
а) множество чисел, кратных трём;
б) множество зрителей финального матча по футболу;
в) множество квадратов натуральных чисел?

215. Является ли счётным:
а) множество нечётных натуральных чисел;
б) множество всех натуральных чисел, оканчивающихся нулём?

216. Является ли замкнутым относительно сложения множество:
а) чётных чисел;
б) нечётных чисел;
в) степеней числа 2?

217. Является ли замкнутым относительно умножения множество:
а) чётных чисел;
б) нечётных чисел;
в) степеней числа 2?

218. Является ли множество аликвотных дробей замкнутым относительно операции:
а) сложения;
б) умножения?

Замечание. Аликвотными называют дроби с числителем 1.

219. При каких целых значениях m значение выражения является целым числом:

а) $\frac{(m-3)^2}{m}$; б) $\frac{(4m+3)^2}{2m+3}$; в) $\frac{(5m+6)(m-1)}{5m+1}$?

220. При каких целых значениях m корень уравнения является целым числом:
а) $mx + 2 = 3x + 4$; б) $mx - 1 = 2(x + 6)$?

221. Верно ли утверждение, что каждое нечётное число может быть представлено в виде:
а) $2m - 3$, где $m \in \boldsymbol{Z}$; б) $2m^2 - 3$, где $m \in \boldsymbol{Z}$?

222. Верно ли утверждение, что каждое чётное число может быть представлено в виде:
а) $4m + 2$, где $m \in \boldsymbol{Z}$; б) $2 - 2m$, где $m \in \boldsymbol{Z}$?

223. Докажите, что если при некоторых значениях x и y значение дроби $\frac{x}{y}$ является целым числом, то также является целым числом значение дроби:

а) $\frac{x+3y}{y}$; б) $\frac{3y-2x}{y}$; в) $\frac{2(x^2-3)-3(y^2-2)}{y^2}$.

224. При некоторых значениях a и b значение дроби $\frac{5a+3b}{a}$ является целым числом. Верно ли утверждение, что при тех же значениях a и b значение дроби $\frac{a-b}{a}$ также является целым числом?

225. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющие уравнению:
а) $xy = 17$;
б) $(x + 1)y = 17$;
в) $(x + 1)(y - 2) = 17$;
г) $xy - 2x + y = 19$.

226. Найдите все целочисленные решения уравнения:

а) $(x - y)(x + 2) = 5$; в) $(2x - y)(x + 2y) = -3$;

б) $xy - x + y^2 - y = 5$; г) $2x^2 + xy - y^2 = -3$.

Упражнения для повторения

227. Из 25 учащихся класса каждый изучает английский или немецкий язык. Известно, что 17 учащихся изучают английский, а 12 — немецкий язык. Сколько учащихся изучают оба языка?

228. Упростите выражение

$$\left(\frac{a-2x}{a^2+4x^2+2ax}-\frac{1}{a-2x}\right)\left(\frac{a^3}{x^2}-8x\right)$$

и найдите его значение, если $a = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$.

? Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определения пересечения, объединения и разности двух множеств. Приведите примеры.
2. Какое соответствие между множествами является взаимно однозначным?
3. Объясните, каким образом можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством целых чисел и множеством натуральных чисел.

§ 5. Делимость чисел

11. Свойства делимости

В множестве целых чисел всегда выполнимы сложение, вычитание и умножение чисел, т. е. сумма, разность и произведение целых чисел всегда являются целыми числами. Иначе обстоит дело с делением. Лишь в отдельных случаях при делении одного целого числа на другое в частном получается целое число.

Напомним, что разделить число a на число b, где $b \neq 0$, — это значит найти такое число k, при умножении на которое числа b получается a, т. е. верно равенство $bk = a$. Ограничение, которое накладывается на b, объясняется тем, что при $a \neq 0$ равенство $0 \cdot k = a$ не является верным ни при каком k, а при $a = 0$ равенство $0 \cdot k = a$ верно при любом k, т. е. частное становится неопределённым. Это делает понятной часто употребляемую фразу «на нуль делить нельзя».

Нас будет интересовать случай, когда a и b $(b \neq 0)$ — целые числа, и частное от деления a на b также является целым числом, т. е. когда существует целое число k, такое, что $a = bk$. В таком случае говорят, что «a делится на b нацело», или короче: «a делится на b».

Определение. **Целое число a делится на целое число b, не равное нулю, если существует такое целое число k, что $a = bk$.**

Например, 56 делится на −8, так как $56 = (-8) \cdot (-7)$, где −7 — целое число, а 78 не делится на −8, так как не существует такого целого числа k, для которого верно равенство $78 = (-8)k$.

Если a делится на b, то число b называют *делителем* числа a, а число a — *кратным* числа b. Говорят также: «a кратно b». Например, делителями числа 4 являются числа 1, −1, 2, −2, 4, −4. Кратными числа 4 являются числа 4, −4, 8, −8, 12, −12 и т. д., вообще любое число вида $4m$, где $m \in Z$.

Рассмотрим некоторые свойства делимости (буквами обозначены целые числа).

1. **Всякое число a, отличное от нуля, делится на себя.**
2. **Нуль делится на любое число b, не равное нулю.**
3. **Если a делится на b ($b \neq 0$) и b делится на c ($c \neq 0$), то a делится на c.**
4. **Если a делится на b ($b \neq 0$) и b делится на a ($a \neq 0$), то числа a и b либо равны, либо являются противоположными числами.**

Справедливость первого свойства вытекает из того, что равенство $a \cdot 1 = a$ верно при любом a, а второго — из того, что равенство $b \cdot 0 = 0$ верно при любом $b \neq 0$.

Докажем справедливость третьего свойства. Из определения делимости следует, что $a = bk$, $b = cm$, где k и m — целые числа. Отсюда $a = (cm)k$, т. е. в силу сочетательного свойства умножения $a = c(mk)$, где mk — целое число, а это означает, что a делится на c.

Докажем теперь справедливость четвёртого свойства. Из определения делимости следует, что $a = bk$ и $b = am$, где k и m — целые числа. Отсюда $a = (am)k$, т. е. $a = a(mk)$. Так как $a \neq 0$, то $mk = 1$. Однако $mk = 1$ для целых чисел m и k тогда и только тогда, когда оба числа m и k равны 1 или равны −1. В первом случае числа a и b равны, во втором они отличаются только знаком.

Определение и свойства делимости находят применение при решении задач.

Приведём примеры.

Пример 1. Пусть a и b — целые числа, причём $b \neq 0$. Докажем, что если a делится на b, то a^n делится на b^n при любом натуральном n.

Из определения делимости следует, что существует такое целое число k, что $a = bk$. Возведя обе части этого равенства в степень n, получим, что $a^n = (bk)^n$, т. е. $a^n = b^n \cdot k^n$.

Так как k — целое число и $b \neq 0$, то k^n также является целым числом и $b^n \neq 0$. Следовательно, по определению a^n делится на b^n.

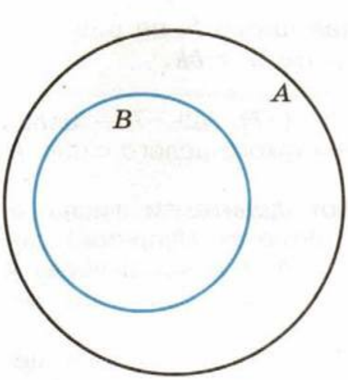


Рис. 10

Пример 2. Выясним, каково соотношение между множеством A чисел, кратных 6, и множеством B чисел, кратных 18.

Пусть целое число a делится на 18. Из условия, что a делится на 18 и 18 делится на 6, следует, что a делится на 6. Значит, каждое число, кратное 18, является кратным 6, т. е. каждый элемент множества B является элементом множества A. При этом в множестве A есть элементы, не принадлежащие B, например число 12. Это означает, что множество B является собственным подмножеством множества A.

Соотношение между множествами A и B показано с помощью кругов Эйлера на рисунке 10.

Упражнения

229. Укажите, если возможно, два значения a, при которых верно высказывание:

а) a делится на 11; в) 0 делится на a;
б) 17 делится на a; г) a делится на 0.

230. Докажите, что если a кратно 6 и b кратно 5, то произведение ab кратно 30.

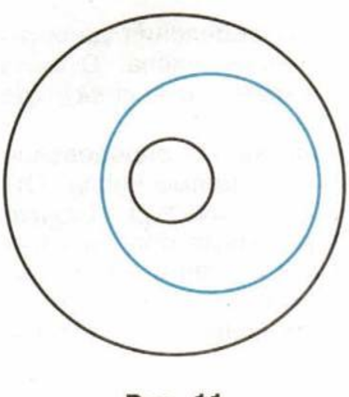


Рис. 11

231. Верно ли высказывание:
а) если a делится на 15, то a делится на 5;
б) если a делится на 5, то a делится на 15;
в) если a делится на 30, то a делится на 90;
г) если a делится на 105, то a делится на 35?

232. Покажите с помощью кругов Эйлера соотношение между множествами A и B, если:
а) A — множество чисел, кратных 4, B — множество чисел, кратных 12;
б) A — множество чисел, кратных 96, B — множество чисел, кратных 16;
в) A — множество чисел, кратных 37, B — множество чисел, кратных 111.

233. Пусть F — множество чисел, кратных 36. Принадлежит ли множеству F число a, если известно, что:
а) a кратно 9; б) a кратно 72; в) a кратно 108?

234. На схеме Эйлера (рис. 11) меньший из кругов изображает множество чисел, кратных 12. Приведите пример бесконечных множеств, которые могут изображать два других круга.

235. На схеме Эйлера (см. рис. 11) средний круг изображает множество чисел, кратных 4. Приведите пример бесконечных множеств, которые могут изображать два других круга.

236. Пусть P — множество чисел, кратных 5, K — множество чисел, кратных 15, F — множество чисел, кратных 60. Укажите:

а) два числа, принадлежащие всем трём множествам;

б) два числа, которые принадлежат множеству P, но не принадлежат множествам K и F;

в) два числа, которые принадлежат множествам P и K, но не принадлежат множеству F.

Покажите соотношение между множествами P, K и F с помощью кругов Эйлера.

Упражнения для повторения

237. Упростите выражение $\dfrac{\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a+b}}{\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}}-\dfrac{a+b}{a}$.

238. Найдите значение выражения, зная, что $n \in N$:

а) $\dfrac{8^{n+1}\cdot 5^{n-1}-8^{n-1}\cdot 5^{n+1}}{40^n}$; б) $\dfrac{6^{2n+3}}{2^{2n+2}\cdot 3^{2n+3}-2^{2n+1}\cdot 3^{2n+1}}$.

239. Изобразите схематически график функции $y=\begin{cases} x^2, & \text{если } |x| \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } |x|>1. \end{cases}$

12. Делимость суммы и произведения

Докажем некоторые свойства делимости суммы и произведения. При доказательстве воспользуемся тем, что сумма и произведение целых чисел есть целое число.

1. Если в сумме целых чисел каждое слагаемое делится на некоторое число, то сумма делится на это число.

Доказательство проведём для трёх слагаемых.

Пусть каждое из целых чисел a, b и c делится на p ($p \in Z$, $p \neq 0$). По определению $a = pk$, $b = pl$, $c = pm$, где k, l и m — целые числа.

Тогда

$$a + b + c = pk + pl + pm = p(k + l + m).$$

Так как k, l и m — целые числа, то $k + l + m$ — целое число, а значит, по определению $a + b + c$ делится на p.

С помощью тех же рассуждений и преобразований можно доказать справедливость данного свойства для любого числа слагаемых.

Заметим, что обратное утверждение неверно. Из того что сумма $a + b + c$ делится на p, не следует, что каждое слагаемое делится на p. Примером может служить сумма $4 + 10 + 16$, которая делится на 3, тогда как ни одно из слагаемых на 3 не делится.

2. Если в разности целых чисел уменьшаемое и вычитаемое делятся на некоторое число, то разность делится на это число.

Пусть a и b — целые числа, a делится на p и b делится на p ($p \in Z$, $p \neq 0$). Если b делится на p, то $-b$ также делится на p. Представив разность $a - b$ в виде $a + (-b)$, получаем сумму, которая в силу предыдущего свойства делится на p, так как в ней делится на p каждое слагаемое.

3. Если в сумме целых чисел все слагаемые, кроме одного, делятся на некоторое число, то сумма не делится на это число.

Пусть a, b и c — целые числа, a делится на p ($p \in Z$, $p \neq 0$), b делится на p, а c не делится на p. Докажем, что сумма $a + b + c$ не делится на p.

Доказательство проведём методом от противного. Предположим, что сумма $a + b + c$ делится на p. Тогда в разности $(a + b + c) - (a + b)$ уменьшаемое и вычитаемое делятся на p, а значит, разность делится на p. Так как разность $(a + b + c) - (a + b)$ равна c, то получается, что c делится на p, а это противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно, и сумма $a + b + c$ не делится на p, что и требовалось доказать.

4. Если в произведении целых чисел один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.

Пусть в произведении целых чисел a и b множитель a делится на p ($p \in Z$, $p \neq 0$). По определению $a = pk$, где k — целое число. Тогда $ab = (pk)b$, и в силу сочетательного свойства умножения $ab = p(kb)$, причём kb — целое число. Значит, по определению ab делится на p.

5. Если в произведении двух целых чисел один из множителей делится на m, а другой на n, то произведение делится на mn.

Пусть a и b — целые числа, a делится на m ($m \in Z$, $m \neq 0$), а b делится на n ($n \in Z$, $n \neq 0$). Тогда по определению $a = mk$, $b = nl$, где k и l — целые числа. Отсюда, применяя переместительное и сочетательное свойства умножения, получаем, что

$$ab = (mk)(nl) = (mn)kl.$$

Так как k и l — целые числа, то их произведение также является целым числом. Значит, ab делится на mn.

При решении задач на делимость часто используются свойства, которые следуют из доказанных свойств и связаны с последовательным расположением целых чисел:

произведение n последовательных целых чисел делится на n;
произведение трёх последовательных целых чисел делится на 6;
произведение двух последовательных чётных чисел делится на 8.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Докажем, что сумма $2^8 + 4^5 + 8^2$ делится на 28.

Представим каждое слагаемое в виде степени числа 2 и вынесем общий множитель за скобки:

$$2^8 + 4^5 + 8^2 = 2^8 + (2^2)^5 + (2^3)^2 = 2^8 + 2^{10} + 2^6 =$$
$$= 2^6(2^2 + 2^4 + 1) = 2^6 \cdot 21.$$

Так как в произведении $2^6 \cdot 21$ первый множитель делится на 4, а второй — на 7, то это произведение (а значит, и данное выражение) делится на 28.

Пример 2. Докажем, что целое число a, не равное нулю и не являющееся делителем 40, не может быть корнем уравнения

$$3x^5 - 9x^3 - 36x + 40 = 0.$$

Допустим, что a — корень уравнения. Тогда верно равенство

$$3a^5 - 9a^3 - 36a + 40 = 0.$$

В левой части этого равенства записана сумма, которая не делится на a, так как в ней все слагаемые, кроме последнего, делятся на a. В правой части записано число 0, которое делится на любое отличное от нуля число и, значит, делится на a. Полученное противоречие показывает, что предположение неверно, и число a не является корнем уравнения.

Пример 3. Докажем, что разность квадратов двух нечётных чисел делится на 8.

Пусть даны числа $2m + 1$ и $2p + 1$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $p \in \boldsymbol{Z}$. Докажем, что при любых целых m и p значение выражения $(2m + 1)^2 - (2p + 1)^2$ делится на 8.

Разложим данное выражение на множители:

$$(2m + 1)^2 - (2p + 1)^2 = (2m + 1 + 2p + 1)(2m + 1 - 2p - 1) =$$
$$= 2(m + p + 1) \cdot 2(m - p) = 4(m + p + 1)(m - p).$$

Если числа m и p одинаковой чётности (оба чётные или оба нечётные), то множитель $m - p$ делится на 2, а если числа m и p разной чётности, то множитель $m + p + 1$ делится на 2. Таким образом, при любых значениях m и p в произведении $4(m + p + 1)(m - p)$ первый множитель делится на 4, а второй или третий делится на 2. Значит, произведение делится на 8.

Пример 4. Докажем, что если разность $a - b$, где $a \in \boldsymbol{Z}$, $b \in \boldsymbol{Z}$, делится на 3, то $a^3 - b^3$ делится на 9.

Разложим разность кубов на множители:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Представим трёхчлен $a^2 + ab + b^2$ в виде суммы, в которой первое слагаемое является квадратом двучлена $a - b$:

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + ab + b^2 - 2ab + 2ab = (a - b)^2 + 3ab.$$

Так как $a - b$ делится на 3, то $(a - b)^2$ также делится на 3, а значит, сумма $(a - b)^2 + 3ab$ делится на 3.

Итак, в произведении $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$, равном $a^3 - b^3$, каждый из множителей делится на 3. Значит, это произведение делится на 9.

Упражнения

240. Докажите, что значение выражения:

а) $6^5 + 36^2 - 216$ делится на 41;
б) $9^5 + 27^3 + 81^2$ делится на 13;
в) $2^8 + 4^5 - 8^2$ делится на 38;
г) $3^{11} + 9^6 + 27^3$ делится на 111.

241. Докажите, что a делится на b, если:

а) $a = 4^{10} + 4^9 + 4^8$, $b = 2^6 - 2^5 - 2^3$;
б) $a = 9^7 + 9^6 + 9^5$, $b = 3^{10} - 3^9 + 3^8$.

242. Укажите, если возможно, три целых значения переменной a, при которых сумма $35 + 3a$:

а) кратна 5;
б) кратна 7;
в) кратна 3.

243. Определите, делится ли значение данного выражения на 6 при любом целом значении c, при некоторых значениях c или не делится на 6 ни при каком значении c:

а) $(3c + 2)(2c + 1) - (6c + 1)(c - 2)$;
б) $(12c - 1)(c + 3) - (6c + 3)(2c - 1)$;
в) $(5c - 1)(6c + 4) + (15c - 2)(2c + 2)$;
г) $(c + 6)(6c - 1) + (3c + 2)(2c - 5)$.

244. Определите, какие из дробей

$$\frac{a}{a+1}, \quad \frac{a}{a+5}, \quad \frac{2a}{2a+1}, \quad \frac{a+6}{11}, \quad \frac{2a}{a+4}, \quad \frac{5a}{15a+10}$$

при допустимых значениях a, где $a \in \mathbb{Z}$:

а) несократимы при любом a;
б) сократимы при любом a;
в) сократимы при некоторых a.

245. Имеет ли целые корни уравнение:

а) $17x^6 - 51x^4 + 34x^2 - 87 = 0$;
б) $26x^4 + 13x^2 - 65x - 7 = 0$?

246. Докажите, что на прямой $32x + 48y = 105$ нет ни одной точки с целочисленными координатами.

247. Принадлежат ли графику уравнения $13x + 65y = 106$ точки с целочисленными координатами?

248. Докажите, что если a и b — трёхзначные числа, сумма которых делится на 37, то, приписав к числу a число b, мы получим шестизначное число, которое делится на 37.

249. Докажите, что четырёхзначное число вида $\overline{abba}$ делится на 11.

250. Докажите, что сумма $2002^{100} + 3003^{100}$ делится на 7, на 11, на 13.

251. Докажите, что:

а) сумма $1^3 + 2^3 + ... + 98^3 + 99^3$ делится на 100;

б) сумма $1^3 + 2^3 + ... + 48^3 + 49^3$ делится на 25.

252. Докажите, что если каждое из двух чётных чисел кратно 3, то сумма их кубов делится на 54.

253. Докажите, что:

а) $2^9 + 1$ делится на 9; б) $3^9 - 1$ делится на 13.

254. Докажите, что сумма кубов трёх последовательных целых чисел делится на 3.

255. Докажите, что если число $a + 7b$ делится на 17 ($a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{Z}$), то число $10a + 2b$ делится на 34.

256. Докажите, что при любом целом m значение выражения кратно 6:

а) $m^3 + 17m$; б) $m^3 - 43m$; в) $m^3 - 3m^2 + 2m$.

257. Докажите, что при любом $a \in \mathbf{Z}$ значение выражения делится на 3:

а) $a^3 + 26a + 15$; б) $a^3 + 20a + 27$.

258. Докажите, что если сумма $ab + cd$ делится на $a - c$, то сумма $ad + bc$ также делится на $a - c$.

Упражнения для повторения

259. Найдите пересечение и объединение множеств натуральных делителей чисел 15 и 18. Чему равен наибольший общий делитель этих чисел?

260. Найдите все точки с целочисленными координатами, принадлежащие графику функции:

а) $\alpha(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$; в) $\gamma(x) = \dfrac{2x^2+3x+3}{x+1}$;

б) $h(x) = \dfrac{x^2-3x-1}{x-2}$; г) $\varphi(x) = \dfrac{x^2-x-1}{x-1}$.

261. Сравните среднее арифметическое и медиану ряда данных:

а) 4; 5; 5; 6; 6; 6; 7; б) 4; 4; 5; 5; 5; 6; 6; 7.

13. Деление с остатком

В младших классах вы встречались со случаями, когда при делении одного натурального числа на другое получается остаток. Например, если 73 разделить на 5, то в частном получится 14 и в остатке 3. Это записывают так:

$$73 : 5 = 14 \text{ (ост. 3)}.$$

Остаток меньше 5. Если из 73 вычесть 3, то получится число 70, которое делится на 5, т. е. запись

$$73 : 5 = 14 \text{ (ост. 3)}$$

можно заменить другой:

$$73 - 3 = 5 \cdot 14,$$

причём $3 < 5$.

Заметим, что если деление натурального числа a на натуральное число b выполняется нацело, то считают, что остаток равен 0. В этом случае разность между числом a и остатком также делится на b.

Вообще число r является остатком от деления натурального числа a на натуральное число b, если разность $a - r$ делится на b и $0 \leqslant r < b$.

В курсе алгебры понятие деления с остатком распространяется на случай, когда делимое является целым числом, а делитель — натуральным. Определение остатка, принятое для натуральных чисел, переносится на этот случай.

Определение. Целое число r называется остатком от деления целого числа a на натуральное число b, если разность $a - r$ делится на b и $0 \leqslant r < b$.

Например, остаток от деления числа −11 на 3 равен 1, так как разность $-11 - 1$ делится на 3 и $0 \leqslant 1 < 3$.

Обозначим частное от деления $a - r$ на b буквой q. Тогда

$$a - r = bq$$

или

$$\boldsymbol{a = bq + r}, \quad \textbf{где } \boldsymbol{0 \leqslant r < b}.$$

Число q называется частным (при $r = 0$) или неполным частным (при $0 < r < b$).

Так, $-11 = 3 \cdot (-4) + 1$. Следовательно, число −4 — неполное частное, полученное при делении числа −11 на число 3.

При решении задач широкое применение находит теорема о делении с остатком.

Теорема. Для любого целого числа a и натурального числа b существует единственная пара целых чисел q и r, таких, что $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$.

Доказательство.

Рассмотрим множество чисел, кратных b, взятых в порядке возрастания:

$$\dots, -4b, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, 4b, \dots.$$

Отметим соответствующие им точки на координатной прямой (рис. 12).

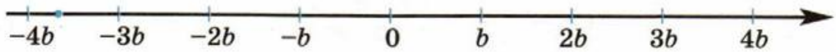


Рис. 12

Передвигаясь по координатной прямой слева направо, будем сравнивать число a с числами, кратными b. Пусть $b(q + 1)$ — первое из этих чисел, которое больше a. Тогда число a либо совпадает с bq, либо заключено между числами bq и $b(q + 1)$, т. е.

$$bq \leqslant a < b(q + 1).$$

Геометрически это означает, что число a изображается точкой, которая либо совпадает с левым концом отрезка, ограниченного точками, изображающими числа bq и $b(q + 1)$, либо находится внутри него. В первом случае разность чисел a и bq равна 0, во втором она больше 0, но меньше b. Обозначив эту разность буквой r, получим, что

$$a - bq = r, \quad \text{где } 0 \leqslant r < b,$$

т. е.

$$a = bq + r, \quad \text{где } 0 \leqslant r < b.$$

Так как отрезок, которому принадлежит точка a, определяется единственным образом, то число q — единственное, а значит, единственным является и число r, равное $a - bq$.

Теорема доказана.

Пример 1. Найдём неполное частное и остаток от деления числа −34 на 9.

Представим число −34 в виде суммы −36 + 2, где −36 — наибольшее из отрицательных чисел, кратных 9 и не превосходящих −34. Тогда $-34 = -36 + 2 = 9 \cdot (-4) + 2$. Неполное частное равно −4, а остаток равен 2.

На делении с остатком основаны различные формы представления целых чисел. Например, при делении целого числа на 3 могут получиться остатки 0, 1 и 2. Поэтому любое целое число может быть представлено в одном из следующих видов:

$$3k, \quad 3k + 1, \quad 3k + 2 \quad (k \text{ — целое число}).$$

Аналогично, исходя из остатков, которые могут получиться при делении целого числа на 5, всякое целое число может быть представлено в одном из следующих видов:

$$5k, \quad 5k + 1, \quad 5k + 2, \quad 5k + 3, \quad 5k + 4 \quad (k \text{ — целое число}).$$

В первом случае множество целых чисел разбивается на три непересекающиеся подмножества, или, как говорят иначе, на три *класса*, во втором случае оно разбивается на пять классов.

Пример 2. Найдём, какие остатки могут получиться при делении квадрата целого числа на 4.

В соответствии с остатками, которые могут получиться при делении целого числа на 4, любое целое число можно представить в одном из видов:

$$4k,\ \ 4k+1,\ \ 4k+2,\ \ 4k+3\ \ (k \text{ — целое число}).$$

Отсюда получаем:

$$(4k)^2 = 16k^2 = 4(4k^2),$$
$$(4k+1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 4(4k^2 + 2k) + 1,$$
$$(4k+2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 4(4k^2 + 4k + 1),$$
$$(4k+3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 4(4k^2 + 6k + 2) + 1.$$

Мы видим, что квадрат целого числа либо делится на 4, т. е. даёт остаток 0, либо при делении на 4 даёт остаток 1. Значит, при делении квадрата целого числа на 4 не может получиться остаток 2 или 3.

Заметим, что при решении задач, связанных с разбиением множества целых чисел на классы в зависимости от остатков от деления на натуральное число n, часто используется утверждение, которое впервые ясно сформулировал и успешно применял в доказательствах известный немецкий математик Петер Густав Дирихле.

! Принцип Дирихле. Если m и n — натуральные числа и $m > n$, то при разбиении множества, состоящего из m элементов, на n классов хотя бы в один из классов попадёт более одного элемента.

Очевидность этого утверждения делает понятной его шуточная формулировка: *если m зайцев сидят в n клетках и $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидит более одного зайца.*

Дирихле Петер Густав Лежён (1805—1859) — немецкий математик; сделал ряд крупных открытий в теории чисел, в области математического анализа, в механике и математической физике, в частности в теории потенциала.

Пример 3. Докажем, что среди 13 разных целых чисел всегда найдутся два числа, разность которых делится на 12.

Действительно, в зависимости от остатков, которые получаются при делении целого числа на 12, множество целых чисел разбивается на 12 классов. Допустим, что 12 из данных чисел попадут в разные классы. Однако тринадцатое число в соответствии с принципом Дирихле попадёт в один класс с каким-либо из этих чисел. Таким образом, среди данных чисел всегда найдутся два числа, которые при делении на 12 дают одинаковые остатки, а это означает, что их разность делится на 12. В самом деле, если a и b — целые числа, $a = 12q_1 + r$ и $b = 12q_2 + r$, где $0 \leqslant r < 12$, то $a - b = (12q_1 + r) - (12q_2 + r) = 12(q_1 - q_2)$, т. е. $a - b$ делится на 12.

Рассмотрим свойство деления с остатком, относящееся к делению натурального числа на натуральное:

Если при делении натурального числа a на натуральное число b получается остаток r, то наибольший общий делитель чисел a и b равен наибольшему общему делителю чисел b и r.

В самом деле, если $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$, то $r = a - bq$. По свойству делимости разности каждый общий делитель чисел a и b является делителем числа r. Значит, множество общих делителей чисел a и b совпадает с множеством общих делителей чисел b и r и потому эти пары чисел имеют один и тот же наибольший общий делитель. Таким образом, если $a = bq + r$, то НОД $(a; b)$ = НОД $(b; r)$.

На этом выводе основан способ нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел. Разъясним сущность этого способа на примере.

Пример 4. Найдём наибольший общий делитель чисел 527 и 1984.

При решении подобных задач обычно записывают числа, разложив каждое из них на простые множители. В нашем случае $527 = 17 \cdot 31$, $1984 = 2^6 \cdot 31$. После этого можно найти наибольший общий множитель — число 31. Решим задачу другим способом.

Разделим большее число на меньшее, а затем будем последовательно делить делитель на получившийся остаток, пока деление не будет выполнено нацело:

$$\begin{array}{r|l} 1984 & 527 \\ \cline{2-2} -\underline{1581} & 3 \\ 403 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 527 & 403 \\ \cline{2-2} -\underline{403} & 1 \\ 124 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 403 & 124 \\ \cline{2-2} -\underline{372} & 3 \\ 31 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 124 & 31 \\ \cline{2-2} -\underline{124} & 4 \\ 0 & \end{array}$$

По доказанному свойству

$$\text{НОД }(1984; 527) = \text{НОД }(527; 403) =$$
$$= \text{НОД }(403; 124) = \text{НОД }(124; 31) = 31.$$

Евклид (III век до н. э.) — древнегреческий учёный, автор самого известного математического сочинения — «Начала» («Элементы»), создатель геометрической системы, на которой основывается вся классическая физика; основоположник геометрической оптики.

Рассмотренный способ нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел описан греческим математиком Евклидом (III в. до н. э.) в его знаменитом трактате «Начала» и получил название *«алгоритм Евклида»*.

Можно доказать, что между наибольшим общим делителем двух чисел a и b, наименьшим общим кратным этих чисел и произведением чисел a и b существует соотношение:

$$\text{НОД}\ (a;\ b) \cdot \text{НОК}\ (a;\ b) = ab.$$

С помощью этого соотношения и алгоритма Евклида можно существенно упростить вычисления НОК $(a;\ b)$.

Например, для вычисления НОК (1984; 527) нужно найти частное произведения чисел 1984 и 527 и их наибольшего общего делителя, т. е.

$$\text{НОК}\ (1984;\ 527) = \frac{1984 \cdot 527}{\text{НОД}\ (1984;\ 527)} = \frac{1984 \cdot 527}{31} = 33\,728.$$

Упражнения

262. Найдите неполное частное и остаток от деления:

а) 38 на 13; в) 5 на 6; д) -1 на 3; ж) -26 на 8;
б) 10 на 5; г) 117 на 24; е) -3 на 4; з) -75 на 16.

263. При делении целого числа a на 85 в остатке получили 34. Делится ли число a на 17; на 5?

264. Выписали подряд первые сто натуральных чисел. Сколько среди них таких, которые:

а) делятся на 6;
б) при делении на 6 дают остаток 1;
в) при делении на 6 дают остаток 3?

265. Найдите наибольшее число воскресений в году.

266. Докажите, что если целые числа a и b при делении на натуральное число p дают равные остатки, то разность $a - b$ делится на p, а если дают различные остатки, то разность $a - b$ не делится на p.

267. Из данных пар чисел выберите те, которые при делении на 5 дают равные остатки:

а) 176 и 131; в) 72 и -23;

б) 78 и 33; г) -61 и -87.

268. Найдите все натуральные числа, которые при делении на 17 дают остаток, равный квадрату неполного частного.

269. При делении на 7 одно целое число даёт остаток 2, а другое 5. Какой остаток получится при делении на 7 произведения этих чисел?

270. Какие остатки могут получиться при делении квадрата целого числа:

а) на 3; б) на 5?

271. Докажите, что при делении на 6 квадрата целого числа не может получиться в остатке 2 или 5.

272. Сколько различных остатков получится при делении куба целого числа на 13?

273. Число a при делении на 7 даёт остаток 2. Какой остаток получится при делении на 7 числа:

а) $8a + 1$; б) $a^2 + a + 1$?

274. Некоторое целое число m даёт при делении на 8 остаток 3. Какой остаток получится при делении на 8 числа $m^2 + 3m + 2$?

275. Докажите, что:

а) если целое число m при делении на 6 даёт остаток 1, то число $m^2 - 2m + 19$ делится на 18;

б) если целое число m при делении на 8 даёт остаток 2, то число $m^2 + 4m - 12$ делится на 64.

276. Существует ли такое целое число, которое при делении на 12 даёт остаток 11, а при делении на 18 — остаток 1?

277. Некоторое число при делении на 5 даёт остаток 1, а при делении на 3 — остаток 2. Найдите остаток от деления этого числа на 15.

278. Некоторое число при делении на 5 даёт остаток 2, а при делении на 3 — остаток 1. Какой остаток получится от деления этого числа на 15?

279. Докажите, что если целые числа a и b дают при делении на 3 одинаковые остатки, не равные нулю, то число $ab - 1$ делится на 3.

280. Докажите, что среди 16 различных натуральных чисел найдутся хотя бы два числа a и b, такие, что число $a - b$ делится на 15.

281. Докажите, что среди 25 различных натуральных чисел найдутся хотя бы два числа a и b, такие, что число $a^2 - b^2$ делится на 24.

282. В классе 37 учащихся. Найдётся ли такой месяц в году, в котором свой день рождения отмечают не менее четырёх учащихся этого класса?

283. Докажите, что:

а) если целое число a не делится на 5, то $a^4 - 1$ делится на 5;
б) если целое число a не делится на 7, то $a^6 - 1$ делится на 7.

284. Докажите, что если число не делится на 7, то либо его куб, увеличенный на 1, делится на 7, либо его куб, уменьшенный на 1, делится на 7.

285. Докажите, что при любых целых a и b значение дроби

$$\frac{ab(a^2-b^2)}{6}$$

является целым числом.

286. Докажите, что при любых целых a и b произведение

$$ab(a^2 - b^2)(4a^2 - b^2)$$

делится на 30.

287. Используя алгоритм Евклида, найдите наибольший общий делитель чисел:

а) 437 и 133; в) 1848 и 375;
б) 735 и 1050; г) 805 и 1265.

288. Найдите наибольший общий делитель числителя и знаменателя дроби и сократите эту дробь:

а) $\frac{114}{133}$; б) $\frac{253}{713}$; в) $\frac{357}{1020}$; г) $\frac{205}{287}$.

289. Используя алгоритм Евклида, найдите наименьшее общее кратное чисел:

а) 884 и 689; б) 2442 и 2838.

Упражнения для повторения

290. Упростите выражение:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{3}\right)^2 : \left(\frac{2a-3}{4a^2+9-6a} - \frac{12a-18}{8a^3+27}\right).$$

291. Найдите, при каких значениях коэффициента k прямая, заданная уравнением $y = kx + 3$, не проходит через точку:

а) $A(4; -1)$; б) $B(-4; 1)$; в) $C(0; 3)$.

292. Найдите область допустимых значений переменной в выражении:

а) $\frac{x}{x-1}$; б) $\frac{x}{x^2-1}$; в) $\frac{x}{x^2+1}$; г) $\frac{x}{x^2+x}$.

14. Арифметика остатков

В некоторых случаях при решении задач на делимость полезными оказываются арифметические свойства, позволяющие в различных числовых выражениях заменять числа их остатками от деления на то или иное натуральное число. Основы таких действий — так называемую «арифметику остатков» — разработал Леонард Эйлер, а позже — «король математиков» Карл Фридрих Гаусс.

Сначала для удобства введём следующее обозначение делимости. Если целое число a делится на целое и отличное от нуля число b, то будем писать $a \vdots b$. Эта запись читается по-разному: «a кратно b», «a делится на b», «b — делитель a», «a — кратное числа b». Если число a не кратно числу b, то это иногда записывают так: $a \not\vdots\, b$ или a не $\vdots\, b$.

При делении на натуральное число b существует ровно b различных остатков — от 0 до $b - 1$. Поэтому всякое целое число a единственным образом можно представить в виде $a = bq + r$. В этом случае множество целых чисел разбивается на b так называемых *классов по модулю b*. Числа, принадлежащие одному классу, называют *сравнимыми по модулю b* (от латинского слова *modulus* — мера).

Если два целых числа a_1 и a_2 при делении на b дают один и тот же остаток r, то эти числа принадлежат одному классу по модулю b, т. е. сравнимы по модулю b. Если $a_1 = bq_1 + r$ и $a_2 = bq_2 + r$, то пишут $a_1 \equiv a_2 (\mathrm{mod}\ b)$. Например, если $24 = 5 \cdot 4 + 4$ и $-11 = 5 \cdot (-3) + 4$, то $24 \equiv (-11) (\mathrm{mod}\ 5)$.

Если целые числа a_1 и a_2 при делении на число b дают один и тот же остаток r, то разность $a_1 - a_2$ кратна b (этот вывод сделан в задаче № 266). Другими словами, числа, сравнимые по модулю b, можно определить двумя разными способами.

Определение 1. Если два целых числа a_1 и a_2 при делении на натуральное число b дают один и тот же остаток, то $a_1 \equiv a_2 (\mathrm{mod}\ b)$.

Определение 2. Если $(a_1 - a_2) \vdots b$, то $a_1 \equiv a_2 (\mathrm{mod}\ b)$.

Почтовая марка, посвящённая К. Ф. Гауссу. ГДР, 1977 г.

Будем пользоваться в равной мере двумя этими *эквивалентными* определениями. В связи со вторым определением множество чисел, сравнимых по модулю b, называют *классом вычетов по модулю* b. Однако подробно рассматривать сами эти множества и их свойства мы не будем.

Второе определение сравнения удобно применять, чтобы определить, сравнимы ли данные числа по модулю b. Так, числа 1492 и 92 сравнимы по модулю 7, поскольку $1492 - 92 = 1400 \vdots 7$. Из этого следует, что при делении на 7 эти числа дают равные остатки. Действительно, $1492 = 213 \cdot 7 + 1$ и $92 = 13 \cdot 7 + 1$.

Сравнения обладают свойствами, практически совпадающими со свойствами равенств, и потому язык сравнений оказывается очень удобным при решении многих задач, связанных с остатками. Рассмотрим некоторые свойства сравнений.

Для любых целых чисел a, b, c и любого натурального числа n верно:

1. $a \equiv a \pmod{n}$.

2. Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $b \equiv a \pmod{n}$.

3. Если $a \equiv b \pmod{n}$, $b \equiv c \pmod{n}$, то $a \equiv c \pmod{n}$.

Первое свойство — *рефлексивность* (от латинского слова *reflexio* — обращение назад) вполне очевидно. Его доказывает равенство $(a - a) \vdots n$.

Второе свойство — *симметричность* сравнений — также очевидно. Оно означает, что если число a имеет такой же остаток при делении на число n, что и число b, то и число b имеет такой же остаток при делении на число n, что и число a. Доказательство можно провести, используя второе определение сравнений. Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $(a - b) \vdots n$. Но из этого следует, что противоположное число $(b - a)$ также кратно числу n, т. е. $b \equiv a \pmod{n}$.

Третье свойство — *транзитивность* — означает, что если числа a и b при делении на n дают равные остатки, числа b и c при делении на n дают равные остатки, то числа a и c при делении на n дают равные остатки. Приведём доказательство этого свойства.

Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $(a - b) \vdots n$, если $b \equiv c \pmod{n}$, то $(b - c) \vdots n$. Поскольку $a - c = (a - b) + (b - c)$, то правая часть кратна n как сумма двух кратных n чисел. Следовательно, и левая часть равенства делится на n, т. е. $a \equiv c \pmod{n}$.

На этих свойствах «похожесть» свойств сравнений со свойствами равенств не заканчивается. Верны также следующие свойства:

4. Если $a \equiv b \pmod{n}$, $c \equiv d \pmod{n}$, то

$$a + c \equiv b + d \pmod{n};$$

$$a - c \equiv b - d \pmod{n};$$

$$ac \equiv bd \pmod{n};$$

$$a^k \equiv b^k \pmod{n}, \text{ где } k \in \mathbf{N}.$$

Докажем, например, первое утверждение.

Если $a \equiv b(\text{mod } n)$, $c \equiv d(\text{mod } n)$, то $(a - b) \vdots n$ и $(c - d) \vdots n$. Поскольку $(a - b) + (c - d)$ делится на число n, то и выражение $(a + c) - (b + d)$, тождественно равное указанной сумме, делится на число n. Это и означает, что $a + c \equiv b + d(\text{mod } n)$.

Похожим образом доказывается и второе утверждение. Для доказательства третьего утверждения достаточно рассмотреть разность $ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d)$, в правой части которой записана сумма двух выражений, кратных n.

Последнее утверждение свойства 4 следует из предшествующего предложения: для доказательства достаточно перемножить k раз сравнение $a \equiv b(\text{mod } n)$.

Таким образом, *сравнения можно почленно складывать, вычитать, перемножать и возводить в степень*.

И последнее свойство сравнений:

5. Если $a \equiv b(\text{mod } n)$, то для любого целого числа c:

$$a + c \equiv b + c(\text{mod } n);$$

$$ac \equiv bc(\text{mod } n).$$

Это свойство означает, что *к обеим частям сравнения можно прибавить любое число или умножить их на любое число*.

Проиллюстрируем применение этих свойств на примере сравнений по модулю 7. Число 2211 при делении на 7 даёт остаток 6, а число 401 — остаток 2. Значит, $2211 \equiv 6(\text{mod } 7)$ и $401 \equiv 2(\text{mod } 7)$. Тогда $2211 + 401 \equiv 6 + 2(\text{mod } 7)$, а значит, остаток от деления числа $2211 + 401$ на 7 будет равен остатку от деления числа $6 + 2 = 8$ на 7, т. е. он равен 1. Эти рассуждения можно записать в виде цепочки сравнений:

$$2211 + 401 \equiv 6 + 2(\text{mod } 7) \equiv 8(\text{mod } 7) \equiv 1(\text{mod } 7).$$

Произведение $2211 \cdot 401$ сравнимо с произведением $6 \cdot 2 = 12$, т. е. $2211 \cdot 401 \equiv 6 \cdot 2(\text{mod } 7) \equiv 12(\text{mod } 7) \equiv 5(\text{mod } 7)$, следовательно, остаток от деления этого произведения на 7 равен 5.

Приведённые примеры показывают, что при вычислении остатков от деления удобно заменять числа их остатками. Это можно выразить в виде следующих правил:

остаток от деления суммы чисел на данное число равен остатку от деления на данное число суммы остатков, получающихся при делении каждого слагаемого на данное число;

остаток от деления разности чисел на данное число равен остатку от деления на данное число разности остатков, получающихся при делении уменьшаемого и вычитаемого на данное число;

остаток от деления произведения чисел на данное число равен остатку от деления на данное число произведения остатков, получающихся при делении каждого множителя на данное число;

остаток от деления k-ой степени на данное число равен остатку от деления на данное число k-ой степени остатка, получающегося при делении основания степени на данное число.

Прежде чем рассмотреть другие примеры, сделаем одно полезное с практической точки зрения замечание. Если остаток r от деления на число n оказывается больше половины числа n, то в сравнении его удобно заменить отрицательным числом $r - n$. Например, при решении двух примеров, приведённых выше, можно записать:

$$2211 \equiv 6 \pmod 7 \equiv -1 \pmod 7.$$

Тогда соответствующие цепочки будут иметь вид:

$$2211 + 401 \equiv -1 + 2 \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7 \text{ и}$$
$$2211 \cdot 401 \equiv -1 \cdot 2 \pmod 7 \equiv -2 \pmod 7 \equiv -2 + 7 \pmod 7 \equiv 5 \pmod 7.$$

Исходя из этих соображений, классы вычетов по модулю n часто записывают в виде $nq \pm 1$, $nq \pm 2$ и т. д. Таким образом, классы целых чисел по их остаткам от деления на 3 можно записать в виде $3k$ и $3k \pm 1$, что удобно для последующей работы с этими числами.

Пример. Найти остаток от деления на 7 числа:

а) 2211^{2212};

б) 1122^{1121}.

Решение.

а) Так как $2211 \equiv -1 \pmod 7$, то $2211^{2212} \equiv (-1)^{2212} \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$.

б) Так как $1122 \equiv 2 \pmod 7$, то $1122^{1121} \equiv 2^{1121} \pmod 7$. Сразу дать ответ на поставленный вопрос не удаётся. Рассмотрим остатки от деления на 7 натуральных степеней числа 2, записывая их в таблицу.

Степень	2^1	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	...
Остаток	2	4	1	2	4	...

Нетрудно заметить, что остатки будут повторяться и дальше, и продолжать выписывать их уже нет необходимости. Важнее всего для решения задачи оказывается сравнение $8 \equiv 1 \pmod 7$.

Представим 2^{1121} в виде $2^{1119} \cdot 2^2 = (2^3)^{373} \cdot 2^2$. Так как $2^3 \equiv 1 \pmod 7$, то $(2^3)^{373} \equiv 1^{373} \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$. Учитывая, что $2^2 \equiv 4 \pmod 7$, получим в итоге $(2^3)^{373} \cdot 2^2 \equiv 1 \cdot 4 \pmod 7 \equiv 4 \pmod 7$.

Ответ: а) 1; б) 4.

В заключение заметим, что вычисления с остатками похожи на вычисления на циферблате часов. Только на такой «окружности» размещено не 12 отметок, как на часах, а столько, на сколько мы делим данное число.

Упражнения

293. Прочтите запись:

а) $a \equiv b \pmod 2$; б) $a \equiv 1 \pmod 2$.

Что она означает?

294. Запишите, используя знак сравнения, предложение:

а) a — чётное число;
б) a при делении на 5 даёт остаток 1;
в) x кратно 3;
г) квадрат нечётного числа, уменьшенный на 1, делится на 8.
(Последнее утверждение докажите.)

295. Верно ли:

а) $17 \equiv 11 \pmod 2$; в) $17 \equiv 11 \pmod 4$;
б) $17 \equiv 11 \pmod 3$; г) $17 \equiv -11 \pmod 4$?

296. Найдите наименьшее положительное значение x, при котором верна запись:

а) $24 \equiv x \pmod 5$; в) $-24 \equiv x \pmod 7$;
б) $37 \equiv x \pmod{13}$; г) $-2 \equiv x \pmod 8$.

297. Из чисел 1253, 1328, 1360, 1222, 1194 выберите те, которые сравнимы с числом 1246 по модулю 6.

298. Известно, что $a \equiv 5 \pmod 7$ и $b \equiv 3 \pmod 7$. Какой остаток от деления на 7 дают числа:

а) $a + b$; б) $a - b$; в) ab; г) a^2; д) b^4?

299. При делении на 16 число 1524 даёт в остатке 4, а число 957 — остаток 13. Найдите остаток от деления на 16 числа:

а) $1524 + 957$; б) $1524 - 957$; в) $1524 \cdot 957$; г) $1524^2 + 957^2$.

300. Время отправления поезда по расписанию — 15 ч. В какое время он прибудет на конечную станцию, если в пути поезд находится 116 ч?

301. В этом году мой день рождения был в субботу. На какой день недели попадёт мой день рождения в следующем году?

302. На какую цифру оканчивается число:

а) 2^{2010}; б) 3^{2010}; в) 9^{2010}?

303. Найдите остаток от деления:

а) $201^{102} + 102^{201}$ на 6; б) $333^{12} + 222^{12}$ на 8.

304. Найдите все целые числа n, такие, что:

а) $n^2 \equiv 1 \pmod 7$; б) $3n \equiv 5 \pmod{13}$.

Упражнения для повторения

305. Докажите, что сумма $1^3 + 2^3 + ... + 98^3 + 99^3$ делится на 50.

306. Используя тождество $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)} = \frac{1}{ab}$, представьте в виде суммы двух дробей: а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{1}{10}$.

307. Ученик купил 8 одинаковых авторучек, несколько карандашей по 4 р., линейку за 9 р., 2 общие тетради по 18 р. и 12 тонких тетрадей. Продавец подсчитал общую стоимость товаров и попросил уплатить 527 р. Нет ли ошибки в вычислениях продавца?

15. Признаки делимости

При решении многих задач, например при разложении чисел на простые множители, сокращении дробей, вынесении общего множителя за скобки, упрощении уравнений и т. п., полезно знать некоторые *признаки делимости*, позволяющие, не выполняя деления, определять, делится ли одно число на другое или нет. Так как деление целых чисел сводится к делению их модулей, то признаки делимости формулируются для натуральных чисел.

Докажем некоторые уже известные вам признаки и выведем новые. При доказательстве будем использовать особенности записи чисел в десятичной системе счисления и свойства делимости.

Начнём с признаков делимости на 2 и на 5.

Всякое натуральное число можно представить в виде $10a + b$, где a — число десятков, b — число, выраженное последней цифрой. Слагаемое $10a$ при любом a делится на 2. Значит, делимость суммы $10a + b$ зависит от делимости второго слагаемого. Если b делится на 2, т. е. цифра b — чётная, то сумма $10a + b$ делится на 2, а если b не делится на 2, т. е. цифра b — нечётная, то сумма $10a + b$ не делится на 2. Таким образом, мы доказали *признак делимости на 2*:

число делится на 2 тогда и только тогда, когда оно оканчивается чётной цифрой.

Так как в рассмотренной сумме $10a + b$ слагаемое $10a$ делится на 5, то с помощью тех же рассуждений можно доказать *признак делимости на 5*:

число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается цифрой 0 или 5.

Выведем теперь признаки делимости на 4 и на 25.

Всякое натуральное число можно записать в виде $100a + (10b + c)$, где a — число сотен, $10b + c$ — число, выраженное двумя последними цифрами. В сумме $100a + (10b + c)$ слагаемое $100a$ делится на 4. Значит, делимость суммы зависит от делимости второго слагаемого $10b + c$.

Если $10b + c$ делится на 4, то сумма делится на 4, а если $10b + c$ не делится на 4, то сумма не делится на 4. Значит, доказан *признак делимости на 4*:

число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, выраженное его двумя последними цифрами, делится на 4.

Учитывая, что в рассмотренной сумме $100a + (10b + c)$ слагаемое $100a$ делится на 25, можно с помощью тех же рассуждений доказать *признак делимости на 25*:

число делится на 25 тогда и только тогда, когда число, выраженное его двумя последними цифрами, делится на 25.

Докажем теперь признаки делимости на 9 и на 3. Доказательство проведём на примере шестизначного числа.

Пусть дано число $\overline{abcdef}$, где $a \neq 0$. Представим его в виде суммы разрядных слагаемых и преобразуем эту сумму, выделив в ней слагаемое, делящееся на 9. Получим:

$$a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f =$$
$$= (99\,999a + a) + (9999b + b) + (999c + c) + (99d + d) +$$
$$+ (9e + e) + f = (99\,999a + 9999b + 999c + 99d + 9e) +$$
$$+ (a + b + c + d + e + f).$$

В полученной сумме первое слагаемое делится на 9 (на 3). Значит, если второе слагаемое делится на 9 (на 3), то сумма делится на 9 (на 3), а если второе слагаемое не делится на 9 (на 3), то и сумма не делится на 9 (на 3). Однако второе слагаемое представляет собой, как говорят, сумму цифр данного числа.

Рассуждения, проведённые для шестизначного числа, справедливы для любого многозначного числа. Таким образом, мы вывели *признаки делимости на 9 и на 3*:

число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9;

число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

Выведем теперь признак делимости на 11. Для этого воспользуемся тем, что всякое число вида $10^{2n} - 1$ или $10^{2n+1} + 1$, где $n \in N$, делится на 11. Действительно, число вида $10^{2n} - 1$ делится на 11, так как его можно записать в виде $100^n - 1$, после чего можно представить в виде произведения первый множитель которого равен $100 - 1$, т. е. 99. Число $10^{2n+1} + 1$ делится на 11, так как сумму $10^{2n+1} + 1$ можно представить в виде произведения, в котором первый множитель равен $10 + 1$, т. е. равен 11.

Как и при доказательстве признака делимости на 9, рассуждения проведём на примере шестизначного числа.

Пусть дано число $\overline{abcdef}$, где $a \neq 0$.

Представим это число в виде суммы разрядных слагаемых и выделим в ней слагаемое, делящееся на 11:

$$a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f =$$
$$= a(10^5 + 1) + b(10^4 - 1) + c(10^3 + 1) + d(10^2 - 1) + e(10 + 1) +$$
$$+ f - a + b - c + d - e =$$
$$= [a(10^5 + 1) + b(10^4 - 1) + c(10^3 + 1) + d(10^2 - 1) + e(10 + 1)] +$$
$$+ [(b + d + f) - (a + c + e)].$$

Первое слагаемое, заключённое в квадратные скобки, делится на 11. Значит, сумма делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится второе слагаемое, заключённое в квадратные скобки и представляющее собой разность между суммой цифр, стоящих на чётных местах, и суммой цифр, стоящих на нечётных местах.

Проведённые рассуждения справедливы для любого многозначного числа.

Отсюда получается признак делимости на 11:

число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой цифр, стоящих на чётных местах, и суммой цифр, стоящих на нечётных местах, делится на 11.

В практике вычислений часто используется свойство, связанное с делением натурального числа на взаимно простые числа, т. е. такие натуральные числа, наибольший общий делитель которых равен 1:

если натуральное число делится на каждое из двух взаимно простых чисел, то оно делится на их произведение.

Докажем это. Начнём с более общего случая. Пусть число m делится на a и на b, где a, b, m — натуральные числа. Докажем, что m делится на число p ($p \in N$), которое является наименьшим общим кратным чисел a и b. Доказательство проведём методом от противного. Допустим, что m не делится на p. Тогда $m = pq + r$, где $0 < r < p$. Отсюда $r = m - pq$. Так как число m делится на a (по условию) и p делится на a (по определению наименьшего общего кратного), то по свойству делимости разности r делится на a. Аналогично можно доказать, что r делится на b. Значит, число r является общим кратным чисел a и b. При этом $0 < r < p$, т. е. меньше наименьшего общего кратного. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно, и, следовательно, число m делится на p.

Таким образом, мы показали, что если число m делится на каждое из чисел a и b, то оно делится на их наименьшее общее кратное. В случае когда a и b — взаимно простые числа, наименьшее общее кратное этих чисел равно их произведению. Значит, если m делится на a и делится на b, а числа a и b — взаимно простые, то m делится на их произведение ab, т. е. их наименьшее общее кратное. Что и требовалось доказать.

Например, число 792 делится на каждое из чисел 22 и 3, а так как эти числа взаимно простые, то оно делится на их произведение, т. е. на 66.

Пример. Докажем, что при любом натуральном n значение дроби $\frac{10^n+5}{15}$ является натуральным числом.

Число $10^n + 5$ делится на 3, так как сумма его цифр равна 6 и 6 делится на 3. Это число делится также на 5, так как оканчивается цифрой 5. Так как числа 3 и 5 взаимно простые, то отсюда следует, что число $10^n + 5$ при любом $n \in N$ делится на их произведение, т. е. на 15. Значит, при любом $n \in N$ значение дроби $\frac{10^n+5}{15}$ является натуральным числом.

Упражнения

308. Делятся ли числа

$$134\,664,\ 81\,162,\ \underbrace{22\ldots2}_{12\text{ раз}},\ \underbrace{66\ldots6}_{18\text{ раз}}:$$

а) на 2; б) на 3; в) на 4; г) на 9; д) на 11?

309. Из данных чисел

$$256\,284,\ 119\,637,\ 8\,631\,164,\ 300\,600,\ \underbrace{22\ldots2}_{12\text{ раз}},\ \underbrace{88\ldots8}_{37\text{ раз}},\ \underbrace{66\ldots6}_{25\text{ раз}}$$

выберите те, которые:

а) делятся на 4 и на 9;

б) делятся на 4 или на 9;

в) делятся на 4, но не делятся на 9.

310. В числе $\overline{a3609a}$ замените букву a, если возможно, цифрой так, чтобы полученное число делилось:

а) на 5; в) на 3; д) на 11.

б) на 4; г) на 9;

311. Докажите, что при любом $n \in N$:

а) число $3^{4n} + 4$ делится на 5;

б) число $9^{2n} + 1$ делится на 2;

в) число $7^{2n+1} + 2^{4n+2}$ делится на 11.

312. Используя тот факт, что 1000 делится на 8, сформулируйте и докажите признак делимости на 8.

313. Докажите, что, кроме доказанного признака делимости на 4, имеет место другой признак: число делится на 4 тогда и только тогда, когда сумма цифры единиц и удвоенной цифры десятков делится на 4.

314. Верно ли утверждение:

а) если число делится на 3 и 8, то оно делится на 24;
б) если число делится на 4 и 9, то оно делится на 36;
в) если число делится на 4 и 6, то оно делится на 24;
г) если число делится на 15 и 8, то оно делится на 120?

315. Сформулируйте признак делимости:

а) на 6; б) на 12; в) на 15; г) на 36.

316. Какие из данных чисел

5 645 112, 863 210, 685 425, 2 786 000

делятся:

а) на 6; б) на 12; в) на 15; г) на 33?

317. Делится ли на 99 число:

а) 121 968; б) 1 106 424; в) $\underbrace{11\ldots1}_{27 \text{ раз}}$?

318. Сократите дробь:

а) $\frac{222}{270}$; б) $\frac{165}{360}$; в) $\frac{525}{600}$; г) $\frac{396}{407}$.

319. Укажите наименьшее и наибольшее трёхзначные числа, кратные:

а) 5; б) 9; в) 6; г) 15; д) 22.

320. Можно ли, переставляя цифры числа 752 046, получить число, которое кратно:

а) 6; б) 50; в) 75; г) 12?

321. В числе $\overline{b7483b}$ замените b цифрой так, чтобы полученное число делилось на 6. Рассмотрите все возможные случаи.

322. Замените звёздочки цифрами так, чтобы число 2*4* делилось:

а) на 15; б) на 36.

323. Докажите, что при любом натуральном n является целым числом значение выражения:

а) $\frac{10^n+17}{9}$; б) $\frac{10^{2n}+8}{12}$; в) $\frac{10^n+134}{18}$.

324. Не выполняя деления, найдите остаток, который получится при делении на 9 числа:

а) 867 724; б) 143 703; в) 300 806.

325. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих уравнению:

а) $xy = 11$;

б) $(x - 1)(y - 2) = 11$;

в) $xy - 2x - y = 9$;

г) $xy - 2x - y = 11$.

326. Сколько нечётных натуральных чисел, не превосходящих 100, не делятся ни на 3, ни на 5?

Упражнения для повторения

327. Не вычисляя значение a, определите, является ли оно целым числом, если:

а) $a = 216 : \frac{1}{16}$; б) $a = 2304 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$; в) $a = -7185 : \frac{5}{6}$.

328. Имеется два вида конвертов без марок и три вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для одного письма?

329. При каких значениях a, b, c, d является тождеством равенство:

а) $x^4 + x^3 + x^2 + 2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$;

б) $x^4 + 2x^2 - x + 2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$?

16. Простые и составные числа

Напомним известные вам определения простого и составного чисел.

Простым числом называется такое натуральное число, которое имеет только два натуральных делителя: 1 и само это число.

Составным числом называется такое натуральное число, которое имеет более двух натуральных делителей.

Число 1 не является ни простым, ни составным числом.

Последовательность простых чисел, взятых в порядке возрастания, начинается так:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ...

Для нахождения простых чисел в III в. до н. э. древнегреческий учёный Эратосфен разработал специальный метод «отсеивания» составных чисел — так называемое «решето Эратосфена». В настоящее время составлены таблицы, содержащие миллионы простых чисел. Естественно, возникает вопрос, найдётся ли среди простых чисел наибольшее. Ответ на этот вопрос был дан ещё в III в. до н. э. греческим математиком Евклидом, который доказал, что простых чисел «больше, чем любое число их», т. е. бесконечно много. Проведём соответствующее доказательство.

Теорема. Множество простых чисел бесконечное.

Доказательство. Допустим, что множество простых чисел конечное. Тогда существует наибольшее простое число. Обозначим его через p_n. Составим произведение простых чисел $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot p_n$ и рассмотрим число p, равное

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot p_n + 1.$$

Число p не является простым, так как $p > p_n$, а по предположению p_n — наибольшее простое число. Оно не является также составным, так как по свойству делимости суммы не делится ни на одно из простых чисел 2, 3, 5, ..., p_n, а других простых чисел по предположению нет. Полученное противоречие показывает, что предположение неверно, и, значит, множество простых чисел бесконечное.

В натуральном ряду простые числа распределяются крайне неравномерно. Можно показать, что в нём существуют сколь угодно большие промежутки, не содержащие ни одного простого числа. Действительно, пусть n — произвольное натуральное число. Составим натуральное число

$$1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n(n + 1) + 1.$$

Прибавляя по 1, получим последовательные натуральные числа:

$$1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n(n + 1) + 2,$$
$$1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n(n + 1) + 3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n(n + 1) + n,$$
$$1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n(n + 1) + (n + 1).$$

Все указанные числа — составные. В самом деле, первое из них делится на 2, второе — на 3, ..., предпоследнее — на n, последнее — на $n + 1$. Таким образом, мы выделили в натуральном ряду промежуток

от $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n(n + 1) + 2$ до $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n(n + 1) + (n + 1)$

включительно, не содержащий ни одного простого числа.

Многими учёными делались попытки найти какое-либо выражение, значениями которого являются только простые числа.

Рассмотрим, например, выражение $F(n) = n^2 + n + 41$. Вычисляя его значения, получим, что

$$F(1) = 43,\ F(2) = 47,\ F(3) = 53,\ F(4) = 61,\ F(5) = 71,\ F(6) = 83.$$

Мы видим, что всякий раз получается простое число. Однако

$$F(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1) = 41 \cdot 43,$$

т. е. $F(41)$ — составное число.

Вообще доказано, что не существует многочлена $P(n)$ с целыми коэффициентами, значением которого при любом n является простое число. Не удалось также найти более сложное выражение, обладающее таким свойством.

Особое внимание математиков к простым числам обусловлено тем, что любое натуральное число, большее единицы, либо является простым, либо разлагается на простые множители. Доказательство этого утверждения содержится в «Началах», там же, где доказывается бесконечность множества простых чисел и приводится алгоритм Евклида. Однако единственность разложения составного числа на простые множители в явном виде Евклид не сформулировал. Лишь в 1801 г. немецкий математик Карл Фридрих Гаусс сформулировал и строго доказал так называемую <u>*основную теорему арифметики*</u>:

для любого натурального числа, большего единицы, существует единственное (с точностью до порядка следования множителей) разложение этого числа на простые множители,

т. е. любое натуральное число a, большее 1, можно единственным образом представить в виде $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$, где $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ — простые числа, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — натуральные числа.

С понятиями простого и составного числа связаны многие задачи на делимость.

Пример 1. Докажем, что если p — простое число и $p > 5$, то либо $p^2 - 1$, либо $p^2 - 19$ делится на 30.

Так как число p — простое, то в зависимости от остатков, которые могут получаться при делении числа p на 30, оно может иметь вид: $30m + 1$, $30m + 7$, $30m + 11$, $30m + 13$, $30m + 17$, $30m + 19$, $30m + 23$, $30m + 29$. Иначе говоря, число p может быть представлено в одном из видов:

$$30m \pm 1, \quad 30m \pm 7, \quad 30m \pm 11, \quad 30m \pm 13.$$

Выражая отсюда p^2, получим:

$$p^2 = (30m \pm 1)^2 = 900m^2 \pm 2 \cdot 30m + 1,$$
$$p^2 = (30m \pm 7)^2 = 900m^2 \pm 2 \cdot 30m \cdot 7 + 49,$$
$$p^2 = (30m \pm 11)^2 = 900m^2 \pm 2 \cdot 30m \cdot 11 + 121,$$
$$p^2 = (30m \pm 13)^2 = 900m^2 \pm 2 \cdot 30m \cdot 13 + 169.$$

Очевидно, что в первом и третьем случаях на 30 делится число $p^2 - 1$, а во втором и четвёртом — число $p^2 - 19$.

Пример 2. Докажем, что если $n \in N$ и $n > 1$, то значение выражения $(n^2 + 1)(n - 1)(n + 1) + 5$ является составным числом.

Преобразуем данное выражение в многочлен и разложим этот многочлен на множители:

$$(n^2 + 1)(n - 1)(n + 1) + 5 = (n^2 + 1)(n^2 - 1) + 5 =$$
$$= n^4 + 4 = n^4 + 4 + 4n^2 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 =$$
$$= (n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n).$$

Если $n \in N$ и $n > 1$, то значение первого множителя является натуральным числом, большим 1. Так как $n^2 + 2 - 2n = (n - 1)^2 + 1$, то значение второго множителя при указанных значениях n также является натуральным числом, большим 1.

Таким образом, если $n \in N$ и $n > 1$, то значение выражения $(n^2 + 1)(n - 1)(n + 1) + 5$ является натуральным числом, имеющим два натуральных делителя, каждый из которых больше 1, а это означает, что оно является составным числом.

Упражнения

330. Выпишите все простые числа от 50 до 100.

331. Из данных чисел

401, 411, 421, 431, 441, 451, 461, 471

выберите простые числа.

332. Найдите все простые числа, на которые делится сумма любых четырёх последовательных степеней числа:

а) 2; б) 3; в) 5.

333. Укажите наименьшее натуральное число, которое имеет только три простых делителя.

334. Разложите на простые множители число:

а) 1176; б) 1020; в) 10!.

335. Сколько натуральных делителей имеет число:

а) 32; б) 48; в) 5!?

336. При каких натуральных значениях переменных m и n значение выражения $mn(m + n)$ будет составным числом?

337. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $n^3(n + 1) - n^2(n - 2) + 1$ является составным числом.

338. Докажите, что при любом $n \in N$ является составным числом значение выражения:

а) $n^2 + 7n + 12$; б) $2n^2 + 11n + 12$.

339. Докажите, что всякое простое число, большее 3, может быть представлено в виде $6n \pm 1$, где $n \in N$.

340. Докажите, что если p — простое число, большее 5, то либо $p^2 - 1$, либо $p^2 + 1$ делится на 10.

341. Докажите, что если p — простое число и $p \geqslant 5$, то при делении p^2 на 12 в остатке получается 1.

342. Докажите, что если простое число p равно разности квадратов двух целых чисел, то эти числа равны $\frac{p-1}{2}$ и $\frac{p+1}{2}$.

343. Докажите, что если m — составное число, то число $2^m - 1$ также является составным.

344. Найдите все простые числа p, такие, чтобы числа $p + 10$ и $p + 14$ также являлись простыми числами.

345. Простые числа, которые можно найти по формуле $M = 2^p - 1$, где p — простое число, называются числами Мерсенна (по имени французского богослова, философа и математика Марена Мерсенна (1588—1648)). Найдите несколько первых чисел Мерсенна.

Упражнения для повторения

346. При каких целых значениях m уравнение $4mx + 2 = 5 + x$ имеет целые корни?

347. Упростите выражение

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-1)} + \frac{1}{(x-1)x} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}.$$

348. Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 270 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Скорость одного автомобиля на 10 км/ч меньше скорости другого. Через 2 ч расстояние между автомобилями составило 50 км. Найдите скорость каждого автомобиля.

? Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение понятия «a делится на b». Сформулируйте и докажите свойства делимости чисел.
2. Сформулируйте свойства делимости суммы и произведения. Приведите доказательства.
3. Сформулируйте теорему о делении с остатком. Найдите неполное частное и остаток от деления -5 на 4.
4. Дайте определение понятия «числа a и b сравнимы по модулю n». Сформулируйте и докажите свойства сравнений.
5. Сформулируйте признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 11, 25. Докажите признаки делимости на 4, 9, 11.
6. Какое число называется простым? Докажите, что среди простых чисел нет наибольшего.

Дополнительные упражнения к главе 2

К параграфу 4

349. Начертите два каких-либо квадрата так, чтобы их пересечением были:

а) прямоугольник; в) треугольник; д) точка.
б) квадрат; г) отрезок;

350. В классе 32 учащихся, каждый из которых посещает факультативные занятия по математике или по физике. Из них 20 учащихся занимаются факультативно математикой, а 16 учащихся — физикой. Сколько учащихся посещают оба факультатива?

351. Из 30 учащихся класса каждый занимается хотя бы в одной из спортивных секций — гимнастической, волейбольной или баскетбольной. В гимнастической секции занимаются 17 учащихся, в волейбольной — 14, в баскетбольной — 12. При этом 7 учащихся занимаются гимнастикой и волейболом, 5 — гимнастикой и баскетболом, 3 — волейболом и баскетболом. Сколько учащихся этого класса занимаются во всех трёх секциях?

352. Из 42 владельцев участков, входящих в кооператив, каждый выращивает крыжовник, смородину или малину. Известно, что 26 человек выращивают крыжовник, 16 человек — смородину, 29 человек — малину. При этом 20 человек выращивают крыжовник и смородину, 18 — крыжовник и малину, а 10 человек выращивают ягоды всех трёх видов. Сколько человек выращивают смородину и малину?

353. Верно ли, что при любом целом m является целым числом значение выражения:

а) $\frac{3m^2 - m - 2}{3m + 2}$; б) $\frac{2m^2 + 5m - 12}{m + 4}$?

354. Известно, что при некоторых x и y значение дроби $\frac{2x - 3y}{y}$ является целым числом. Верно ли, что при тех же x и y целым числом является значение выражения $\frac{5y + 16x}{y}$?

355. Известно, что при некоторых значениях m и n значение дроби $\frac{m}{n}$ является целым числом. Является ли целым числом при тех же m и n значение дроби:

а) $\frac{5m^2 - 3n^2}{n^2}$; б) $\frac{(4m - n)(4m + n)}{n^2}$; в) $\frac{(m - n)(m^2 + mn + n^2)}{n^3}$?

356. Найдите все целые значения a, при которых значение дроби

$$\frac{a^2+4}{a-1}$$

является целым числом.

357. Найдите все целые значения m, при которых корень уравнения

$$mx - 2x = m^2 + 2$$

является целым числом.

К параграфу 5

358. Докажите, что:

а) $9^2 + 3^5 + 27^2$ делится на 39;

б) $25^2 - 5^2 - 125$ делится на 95;

в) $4^6 + 8^5 - 2^{10}$ делится на 44;

г) $6^5 - 36^2 + 216$ делится на 93.

359. Докажите, что если сумма целых чисел a, b и c делится на 6, то сумма их кубов также делится на 6.

360. Докажите, что среди семи целых чисел найдутся хотя бы два числа, разность которых делится на 6.

361. Докажите, что если целые числа a и b при делении на натуральное число n дают равные остатки, то числа a^m и b^m, где $m \in N$, при делении на n также дают равные остатки. Используя этот вывод, найдите остаток от деления:

а) 5^{114} на 6; б) 3^{129} на 8.

362. При делении на 7 целое число m даёт остаток 1, целое число n — остаток 3, а целое число p — остаток 2. Докажите, что число $12m + 11n + 2p$ делится на 7.

363. Целое число x при делении на 5 даёт остаток 1. Какой остаток получится при делении на 5 числа x^2; числа x^3?

364. Докажите, что если при делении целого числа x на 4 получается остаток 1, то число $x^2 + x - 2$ делится на 4.

365. Какие остатки могут получиться при делении квадрата натурального числа:

а) на 6; б) на 8?

366. Найдите наименьшее натуральное число, которое:

а) при делении на 5 даёт остаток 1, а при делении на 6 — остаток 2;

б) при делении на 9 даёт остаток 5, а при делении на 4 — остаток 3.

367. При делении натурального числа n, меньшего 60, на числа 3, 4 и 5 получили соответственно остатки a, b и c. Докажите, что число n равно остатку от деления числа $40a + 45b + 36c$ на 60.

368. Докажите, что при любом целом n значение выражения:

а) $n^3 + 5n$ делится на 6;

б) $2n^6 - n^4 - n^2$ делится на 36.

369. Докажите, что если каждое из целых чисел m и n не кратно 3, то число $m^2 - n^2$ делится на 3.

370. Докажите, что если числа m ($m \in \boldsymbol{Z}$) и 6 взаимно просты, то разность $m^2 - 1$ делится на 6.

371. Делится ли число $\underbrace{44\ldots4}_{30\text{ раз}}$:

а) на 4; б) на 3; в) на 9; г) на 6; д) на 66?

372. Докажите, что если n — простое число и $n > 3$, то разность $n^2 - 1$ делится на 24.

373. Докажите, что при любом целом a разность $a^6 - a^2$ делится на 30.

374. Докажите, что квадрат любого простого числа, большего 3, при делении на 12 даёт остаток 1.

Глава 3 Действительные числа. Квадратные корни

В этой главе к множеству рациональных чисел добавится множество чисел, которые нельзя представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби или в виде обыкновенной дроби, — множество иррациональных чисел. Вместе рациональные и иррациональные числа составляют множество действительных чисел. Появление иррациональных чисел позволяет рассмотреть арифметический квадратный корень и его свойства, что, в свою очередь, даёт возможность в последующих главах вывести формулу корней квадратного уравнения.

§ 6. Множество рациональных и множество действительных чисел

17. Рациональные числа

В множестве целых чисел не всегда возможно выполнить деление. Но если расширить множество целых чисел, введя дробные числа, такие, как $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{7}{6}$, $-\frac{7}{6}$ и т. д., то в множестве целых и дробных чисел деление становится выполнимым. Целые и дробные числа составляют *множество рациональных чисел*. Слово «рациональное» происходит от латинского слова *ratio* — отношение (частное).

Множество рациональных чисел обозначают буквой $\boldsymbol{Q}$ (первая буква французского слова *qutient* — отношение). В этом множестве выполнимы сложение, вычитание, умножение и деление, кроме деления на нуль. В результате выполнения любой из этих операций над рациональными числами получается рациональное число, т. е. множество рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$ замкнуто относительно четырёх арифметических операций (исключая деление на нуль). Например:

$$\frac{3}{10}+\frac{2}{15}=\frac{13}{30};\quad \frac{7}{8}-\frac{3}{4}=\frac{1}{8};\quad -\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{1}{2};\quad -\frac{4}{9}:\left(-\frac{5}{9}\right)=\frac{4}{5}.$$

Вообще

если $a \in \boldsymbol{Q}$ и $b \in \boldsymbol{Q}$, то $a + b \in \boldsymbol{Q}$, $a - b \in \boldsymbol{Q}$, $ab \in \boldsymbol{Q}$;

если $a \in \boldsymbol{Q}$ и $b \in \boldsymbol{Q}$ и $b \neq 0$, то $a : b \in \boldsymbol{Q}$.

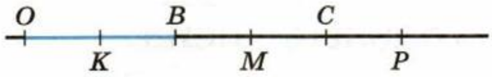


Рис. 13

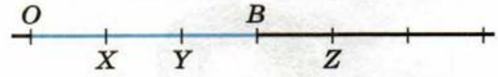


Рис. 14

Рациональные числа применяются при измерении величин (длин, площадей, объёмов, промежутков времени и др.). Так, если длину отрезка OB (рис. 13) принять за единицу длины и обозначить её буквой e, то $OB = 1e$, $OK = \frac{1}{2}e$, $OM = \frac{3}{2}e$, $OC = 2e$, $OP = \frac{5}{2}e$.

Если единичный отрезок OB (рис. 14) разделить на 3 равные части, то при той же единице длины e получим: $OX = \frac{1}{3}e$, $OY = \frac{2}{3}e$, $OZ = \frac{4}{3}e$.

Положительные рациональные числа записываются в виде обыкновенных дробей, а отрицательные — в виде обыкновенных дробей со знаком «минус». Одно и то же рациональное число может быть представлено многими способами. Например,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots, \quad -\frac{1}{2} = -\frac{2}{4} = -\frac{3}{6} = -\frac{4}{8} = \ldots .$$

Так как черта дроби является одновременно и знаком деления, то и дробное отрицательное число можно записать в виде дроби, например: $-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$, $-\frac{3}{5} = \frac{-3}{5}$, $-\frac{7}{4} = \frac{-7}{4}$. Таким же образом можно представить любое целое число в виде дроби с любым натуральным знаменателем. Возьмём, например, знаменатель 2, получим:

$$-3 = \frac{-6}{2}, \quad -2 = \frac{-4}{2}, \quad -1 = \frac{-2}{2}, \quad 0 = \frac{0}{2}, \quad 1 = \frac{2}{2}, \quad 3 = \frac{6}{2}.$$

Вообще любое рациональное число можно представить в виде дроби, числитель которой — целое число, а знаменатель — натуральное, т. е. в виде *отношения целого числа к натуральному*. Для каждого числа существует сколько угодно таких дробей, но среди них есть лишь одна дробь с наименьшим знаменателем. Для целых чисел таким знаменателем является число 1.

Так,

$$-3 = \frac{-3}{1}, \; -2 = \frac{-2}{1}, \; -1 = \frac{-1}{1}, \; 0 = \frac{0}{1}, \; 1 = \frac{1}{1}, \; 2 = \frac{2}{1}, \; 3 = \frac{3}{1}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о представлении рациональных чисел в виде десятичных дробей. Обыкновенную дробь, знаменатель которой равен степени числа 10, записывают в виде *десятичной дроби*. Например:

$$\frac{3}{10} = 0{,}3; \quad \frac{14}{100} = 0{,}14; \quad \frac{4005}{1000} = 4{,}005.$$

Если знаменатель обыкновенной дроби содержит лишь простые множители 2 или 5, то её можно привести к знаменателю, представляющему степень числа 10, и записать в виде десятичной дроби. Например:

$$\frac{7}{25} = \frac{28}{100} = 0{,}28; \quad \frac{43}{20} = 2\frac{3}{20} = 2\frac{15}{100} = 2{,}15.$$

Если знаменатель несократимой дроби содержит другие простые множители, кроме множителей 2 и 5, то её нельзя представить в виде десятичной дроби. Например, дроби $\frac{17}{6}$ и $\frac{9}{11}$ нельзя привести к знаменателю, являющемуся степенью числа 10, и поэтому нельзя записать в виде десятичной дроби. В таких случаях при делении числителя на знаменатель не может получиться в остатке 0, и деление продолжается бесконечно:

$$\begin{array}{l|l} 17 & 6 \\ \hline \;\;50 & 2{,}8333\ldots \\ \hline \;\;\;\;20 & \\ \hline \;\;\;\;\;\;20 & \\ \hline \;\;\;\;\;\;\;\;20 & \\ \hline \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;2 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 9 & 11 \\ \hline 90 & 0{,}8181\ldots \\ \hline \;\;20 & \\ \hline \;\;\;\;90 & \\ \hline \;\;\;\;\;\;20 & \\ \hline \;\;\;\;\;\;\;\;9 & \end{array}$$

Считают, что эти дроби обращаются в *бесконечные десятичные дроби*:

$$\frac{17}{6} = 2{,}8333\ldots; \quad \frac{9}{11} = 0{,}8181\ldots.$$

В таких дробях начиная с некоторого момента одна цифра или группа цифр бесконечно повторяются. Это объясняется неизбежным повторением остатков при делении. Повторяющуюся цифру или группу цифр называют *периодом*. Так, в бесконечных десятичных дробях 2,8333... и 0,8181... периодами являются 3 и 81 соответственно.

Бесконечные десятичные периодические дроби записывают короче: выписывают все цифры до первого периода и приписывают к ним период, заключённый в круглые скобки.

Например,

$$\frac{17}{6} = 2{,}8333\ldots = 2{,}8(3); \quad \frac{9}{11} = 0{,}8181\ldots = 0{,}(81).$$

Читают: 2 целых 8 десятых и 3 в периоде; 0 целых 81 в периоде.

Любую конечную десятичную дробь можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби, приписав к десятичной дроби бесконечную последовательность нулей.

Например:

$$4{,}271 = 4{,}271000\ldots = 4{,}271(0);$$
$$-5{,}68 = -5{,}68000\ldots = -5{,}68(0).$$

Таким же способом можно представить любое целое число в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Например:

$$75 = 75{,}000\ldots = 75{,}(0);$$
$$-32 = -32{,}000\ldots = -32{,}(0);$$
$$0 = 0{,}000\ldots = 0{,}(0).$$

Значит, **любое рациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби.** Верно и обратное утверждение: **любая бесконечная периодическая десятичная дробь представляет некоторое рациональное число.**

Возьмём, например, бесконечную десятичную периодическую дробь $x = 0{,}8333... = 0{,}8(3)$. Умножив её на 10, получим $10x = 8{,}333... = 8{,}(3)$. Разность $10x - x$ равна 7,5:

$$\begin{array}{r} -\,8{,}333... \\ \underline{0{,}833...} \\ 7{,}5 \end{array}$$

Отсюда $9x = 7{,}5$; $x = \frac{75}{90}$; $x = \frac{5}{6}$.

Значит, $0{,}8(3) = \frac{5}{6}$.

Таким образом можно обратить любую бесконечную десятичную периодическую дробь в обыкновенную. Заметим, что бесконечная десятичная дробь с периодом 9 обращается в натуральное число или десятичную дробь.

Пусть, например, $x = 5{,}6(9)$, тогда

$$10x = 56{,}(9),$$
$$10x - x = 51{,}3,$$
$$9x = 51{,}3,$$
$$x = 5{,}7.$$

Так как любой десятичной дроби соответствуют две бесконечные десятичные дроби, одна с периодом 9, другая с периодом 0, то дроби с периодом 9 обычно не рассматривают.

Упражнения

375. Какие из чисел -100; $-\frac{3}{5}$; $\frac{4}{10}$; 7; -8; $\frac{9}{2}$; 0; $-\frac{6}{1}$; 1 являются:

а) целыми положительными;
б) целыми отрицательными;
в) дробными положительными;
г) дробными отрицательными?

376. Верно ли, что:

а) $\frac{4}{7} \cdot \frac{14}{5} : \frac{2}{5} \in \boldsymbol{N}$;
г) $\frac{7}{15} \cdot \frac{5}{7} - 3 : 9 \in \boldsymbol{N}$;
б) $\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right) : \frac{1}{8} \in \boldsymbol{Z}$;
д) $\frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right) : \frac{1}{3} \in \boldsymbol{Q}$;
в) $\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{6}{5} \in \boldsymbol{Q}$;
е) $\frac{6}{7} : \left(2 - \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{1}{2} \in \boldsymbol{Z}$?

377. Верно ли, что если:
а) $a \in \boldsymbol{N}$, то $a \in \boldsymbol{Z}$ и $a \in \boldsymbol{Q}$;
б) $a \in \boldsymbol{Z}$, то $a \in \boldsymbol{N}$ и $a \in \boldsymbol{Q}$?

378. Напишите два значения x, при которых:
а) $x \in \boldsymbol{Z}$ и $x \notin \boldsymbol{N}$;
б) $x \in \boldsymbol{Q}$ и $x \notin \boldsymbol{Z}$;
в) $x \in \boldsymbol{Q}$ и $x \notin \boldsymbol{N}$.

379. Напишите две дроби, знаменателем которых является число 17 и которые выражают натуральные числа.

380. На рисунке 15 кругами изображены множества $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Z}$. Множеству каких чисел соответствует закрашенная часть?

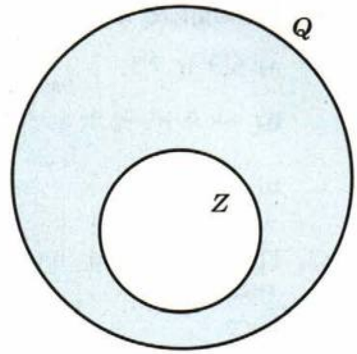


Рис. 15

381. Представьте каждое из чисел

$$0;\quad 5;\quad -6;\quad 1{,}4;\quad 0{,}25 \text{ и } -0{,}75$$

в виде дроби с целым числителем и наименьшим натуральным знаменателем.

382. Представьте каждое из чисел

$$-\frac{4}{6};\quad -\frac{12}{8};\quad -1{,}2;\quad -8 \text{ и } 2\frac{2}{4}$$

двумя способами в виде дроби $\frac{a}{b}$, где $a \in \boldsymbol{Z}$ и $b \in \boldsymbol{N}$.

383. Сравните рациональные числа:

а) $-2{,}7$ и $-2{,}69$;
б) $\frac{7}{8}$ и $\frac{8}{9}$;
в) $-\frac{5}{6}$ и $-\frac{6}{7}$;
г) $3\frac{3}{4}$ и $3\frac{5}{7}$;
д) $-1\frac{6}{11}$ и $-1\frac{8}{15}$;
е) $1\frac{7}{8}$ и $1{,}875$.

384. Сравните числа:

а) $\frac{2}{7}$ и $0{,}(3)$;
б) $1{,}(65)$ и $1\frac{12}{25}$;
в) $2{,}7(8)$ и $2{,}8(7)$;
г) $-62{,}31(564)$ и $-62{,}31(465)$.

385. Назовите пять рациональных чисел, заключённых между числами:

а) $5{,}01$ и $5{,}02$;
б) $-1{,}1$ и $-0{,}99$;
в) $\frac{5}{7}$ и $\frac{6}{7}$;
г) $-\frac{8}{11}$ и $-\frac{9}{11}$;
д) $32{,}0(62)$ и $32{,}0(70)$;
е) $-5{,}3(4)$ и $-5{,}3(5)$.

386. Напишите пять дробных чисел, заключённых между числами:

а) 6,3 и 7,3;
б) $-8{,}9$ и $-5{,}1$;
в) $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$;
г) $-\frac{1}{5}$ и $-\frac{1}{4}$;
д) 0,1(7) и 0,1(8);
е) $-3{,}2(52)$ и $-3{,}2(51)$.

387. Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:

а) $\frac{2}{3}$;
б) $\frac{19}{15}$;
в) $-\frac{1}{3}$;
г) 18;
д) -23;
е) $-\frac{12}{15}$;
ж) $4\frac{3}{16}$;
з) $5\frac{1}{33}$.

388. Запишите в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:

а) $-\frac{5}{6}$;
б) $\frac{101}{8}$;
в) $-\frac{48}{125}$;
г) $\frac{12}{7}$.

389. Представьте в виде обыкновенной дроби число:

а) 1,(3);
б) 2,(25);
в) 1,6(7);
г) 0,41(6);
д) 5,2(45);
е) 3,6(020).

390. Найдите значение выражения:

а) 3,1(28) + 2,(21);
б) 3,1(28) + 2,4(1).

391. Найдите модуль разности x и y, если:

а) $x = 7{,}(8)$ и $y = 5{,}(4)$;
б) $x = 1{,}(38)$ и $y = 2{,}(57)$.

Результат округлите до десятых.

392. Начертите отрезок. Пусть его длина равна $1e$. Постройте отрезки длиной $\frac{1}{2}e$, $0{,}1e$, $\frac{4}{3}e$. Каким числом выражается длина каждого из построенных отрезков, если единица длины $\frac{1}{4}e$?

Упражнения для повторения

393. Докажите, что при любом целом значении x значение дроби является целым числом:

а) $\frac{x^2(x^2+8)+16}{x^2+4}$; б) $\frac{6(x^4-2x)-3(2-4x)}{x^2+1}$.

394. Дана функция $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x+1}$. Найдите:

а) $f(2)$; б) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; в) $f\left(\frac{1}{a}\right)$; г) $f\left(\frac{a+1}{a-1}\right)$.

18. Действительные числа

В множестве рациональных чисел выполнимы операции: сложение, вычитание, умножение и деление (за исключением деления на нуль). Однако рациональных чисел недостаточно для измерения величин. Рассмотрим десятичное измерение отрезков.

Примем длину отрезка OB (рис. 16) за единицу длины и обозначим её буквой e. Тогда $OB = 1e$.

Рис. 16

Измерим длину отрезка OK. В отрезке OK единичный отрезок OB укладывается 2 раза, и при этом получается остаток CK, который меньше, чем OB. Значит, длина $2e$ есть приближённое значение длины отрезка OK с точностью до $1e$: $OK \approx 2e$.

Разделим отрезок OB на 10 равных частей. Десятая часть этого отрезка укладывается в остатке CK 4 раза, и получается остаток, меньший 0,1 отрезка OB. Значит, длина $2{,}4e$ есть приближённое значение длины отрезка OK с точностью до $0{,}1e$: $OK \approx 2{,}4e$.

Таким образом можно неограниченно повышать точность измерения, находя сотые, тысячные и т. д. доли длины отрезка OK.

В процессе десятичного измерения отрезков на каком-то шаге может не получиться остаток. Тогда результатом измерения будет десятичная дробь или натуральное число. Если же остаток будет получаться всегда, то результатом измерения будет бесконечная десятичная дробь.

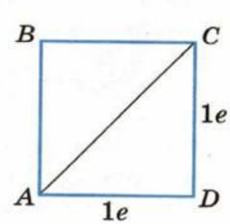


Рис. 17

Получающиеся при десятичном измерении отрезков бесконечные десятичные дроби далеко не всегда оказываются периодическими. Например, длина диагонали квадрата, сторона которого равна $1e$ (рис. 17), будет выражаться бесконечной десятичной непериодической дробью.

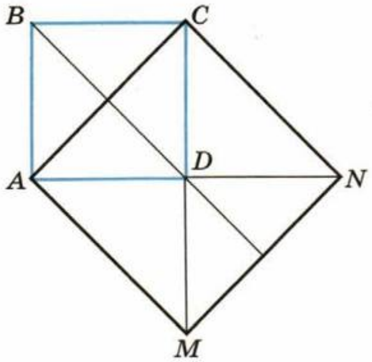


Рис. 18

Действительно, если бы эта дробь оказалась периодической, то она представляла бы рациональное число, которое можно записать в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Если на диагонали AC квадрата построить другой квадрат (рис. 18), то его площадь будет в 2 раза больше площади первого квадрата. Так как площадь первого квадрата $1e^2$, то площадь второго равна $2e^2$. Значит,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Теперь докажем, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. Это число не может быть натуральным, так как $1^2 < 2$, $2^2 > 2$, $3^2 > 2$ и т. д.

Из равенства $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ получаем: $\frac{m^2}{n^2} = 2$, $m^2 = 2n^2$. Так как $2n^2$ — чётное число и $n \neq 1$, то m^2 — чётное, и потому m — чётное число. Значит, m можно представить в виде $2k$, где k — натуральное число.

Получим:

$$(2k)^2 = 2n^2, \quad 4k^2 = 2n^2, \quad 2k^2 = n^2.$$

Из последнего равенства следует, что n — чётное число, а поэтому дробь $\frac{m}{n}$ сократима. Получили противоречие, откуда следует, что нет такого рационального числа, квадрат которого равен двум.

Действительно, длина диагонали квадрата AC (см. рис. 17) не может выражаться рациональным числом, если за единицу длины принять длину стороны квадрата. Говорят, что диагональ квадрата *несоизмерима* с его стороной. Вообще, если длина некоторого отрезка не выражается через другой отрезок, принятый за единичный, рациональным числом, то эти отрезки называют *несоизмеримыми.*

Чтобы длина каждого отрезка, а следовательно, и координата каждой точки координатной прямой выражались числом, надо к множеству рациональных чисел, т. е. множеству бесконечных десятичных периодических дробей, добавить бесконечные десятичные непериодические дроби. Получим *множество действительных чисел*. Его обозначают буквой $\boldsymbol{R}$ (первая буква латинского слова *realis* — реальный, существующий в действительности). Бесконечные десятичные непериодические дроби называют *иррациональными числами* (приставка «ир-» означает отрицание). Примером иррационального числа может служить число $\pi = 3{,}1415926536...$. Значит, множество действительных чисел состоит из рациональных и иррациональных чисел.

Между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой существует взаимно однозначное соответствие, т. е. каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой и каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число.

Действительные числа можно сравнивать так, как сравнивают десятичные дроби. Для положительных чисел сначала сравнивают целые части. Если они равны, сравнивают разряды десятых. Если и в них единиц поровну, сравнивают разряды сотых и т. д.

Например,

$$6{,}513... < 6{,}520... ; \quad -1{,}807... > -1{,}808... .$$

Если изобразить на координатной прямой два действительных числа, то меньшее из них будет располагаться левее большего.

В множестве действительных чисел выполнимы операции сложение, вычитание, умножение и деление (исключая деление на нуль), т. е. множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ замкнуто относительно этих операций. С помощью десятичных дробей можно найти приближённые значения суммы, разности, произведения и частного с любой степенью точности. Найдём, например, три первые цифры произведения ab, если $a = 1{,}(3)$ и $b = 0{,}616616661...$ (группы цифр, состоящие из одной, двух, трёх и т. д. шестёрок, разделяются единицами). Будем перемножать приближённые значения a и b с недостатком и с избытком, повышая с каждым шагом точность:

$$a = 1{,}333333...; \quad b = 0{,}616616661...;$$

$$1 \cdot 0 = 0; \quad 2 \cdot 1 = 2;$$

$$0 < ab < 2.$$

Первая цифра в произведении ab есть 0 или 1.

$$1{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}78; \quad 1{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}98;$$

$$0{,}78 < ab < 0{,}98.$$

Первая цифра в произведении ab есть 0.

$$1{,}33 \cdot 0{,}61 = 0{,}8113; \quad 1{,}34 \cdot 0{,}62 = 0{,}8308;$$

$$0{,}8113 < ab < 0{,}8308.$$

Вторая цифра в произведении ab есть 8.

$$1{,}333 \cdot 0{,}616 = 0{,}821128; \; 1{,}334 \cdot 0{,}617 = 0{,}823078;$$

$$0{,}821128 < ab < 0{,}823078.$$

Третья цифра в произведении ab есть 2. Значит,

$$ab = 0{,}82... .$$

Таким образом, можно найти сколько угодно цифр произведения или суммы. Описание этих способов может служить определением сложения и умножения действительных чисел.

Упражнения

395. Какие из чисел $2\frac{2}{3}$; $-3,(24)$; 0; 5,727727772... (группы цифр, состоящие из одной, двух, трёх и т. д. семёрок, разделяются двойками); 6,323232... (группы цифр, состоящие из тройки и двойки, бесконечно повторяются) являются:

а) рациональными; б) иррациональными?

396. Каким из множеств $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$ принадлежит:

а) 6,(0); в) 0,8(671);
б) $-1{,}35(0)$; г) π?

397. Принадлежат ли множествам $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$ корни уравнения $x^2 = 2$?

398. Какое число принадлежит $\boldsymbol{R}$ и не принадлежит $\boldsymbol{Q}$? Приведите пример.

399. Верно ли, что если:

а) $x \in \boldsymbol{Z}$, то $x \in \boldsymbol{Q}$ и $x \in \boldsymbol{R}$;
б) $x \in \boldsymbol{Q}$, то $x \notin \boldsymbol{N}$ и $x \in \boldsymbol{R}$;
в) $x \in \boldsymbol{R}$, то $x \in \boldsymbol{Q}$;
г) $x \in \boldsymbol{R}$ и $x \in \boldsymbol{N}$, то $x \in \boldsymbol{Z}$?

400. Напишите три числа, которые принадлежат:

а) $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{Z}$; в) $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$;
б) $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{R}$; г) $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$.

401. Сравните:

а) 101,71... и 110,8...; г) 4,446... и $-0{,}303...$;
б) $-4{,}315...$ и $-4{,}318...$; д) $-1{,}234...$ и $-2{,}221...$;
в) 4,9(18) и 4,928...; е) $-0{,}123...$ и $-0{,}121...$.

402. Какие из целых чисел расположены между числами:

а) $-3{,}81...$ и 2,13...; в) $-5{,}111...$ и $-1{,}212...$;
б) 0,068... и 4,032...; г) $-4{,}26...$ и 0?

403. Расположите числа 5,28; $-1{,}634...$; $-1{,}34$; $-1{,}(3)$; 2,3(4) и 2,(34):

а) в порядке возрастания;
б) в порядке убывания.

404. Запишите какое-нибудь иррациональное число a, которое удовлетворяет двойному неравенству:

а) $0{,}2 < a < \frac{3}{7}$; б) $\frac{3}{7} < a < 0{,}5$.

405. Найдите три первые цифры суммы 61,8129... + 37,6828... .

406. Может ли сумма двух бесконечных десятичных периодических дробей быть бесконечной десятичной непериодической дробью?

407. Найдите четыре первые цифры длины окружности в сантиметрах, радиус которой равен 2,35 см.

408. Радиус окружности равен 1,4 см. Найдите две первые цифры площади круга в квадратных сантиметрах.

409. Может ли сумма двух положительных иррациональных чисел быть рациональным числом?

410. Докажите, что если a^2, b^2, $a - b$, где $a \neq b$, — рациональные числа, то $a + b$ — рациональное число.

411. Известно, что $a + b$ — рациональное число, а числа a и b — иррациональные. Каким числом — рациональным или иррациональным — будет число:

а) $a - b$;
б) $3a + 5b$?

412. Число a — рациональное, а число b — иррациональное. Каким числом (рациональным или иррациональным) является:

а) $3a + b$;
б) $a + 2b$;
в) $a^2 + 4a + b$;
г) $3a^2 - a + 4b$?

Упражнения для повторения

413. Сравните числа:

а) 3,4(12) и 3,(412);
б) −2,5(67) и −2,56(7);
в) 0,9(56) и 0,9(506);
г) −1,4(302) и −1,4(32).

414. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{a+b}{a^2-2ab+b^2}-\dfrac{a}{a^2-b^2}\right)\cdot\dfrac{a-b}{ab+b^2}$;

б) $\left(\dfrac{a^3}{a^2+b^2+2ab}-\dfrac{a^2}{a+b}\right):\left(\dfrac{a^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a}{a+b}\right)$.

415. При каких значениях a и b прямые $y = -2x + b$ и $y = ax - b$ пересекаются в точке $(3; -1)$?

19. Числовые промежутки

Рис. 19

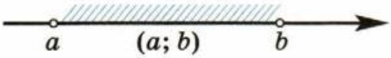


Рис. 20

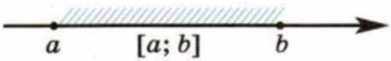


Рис. 21

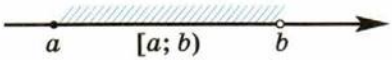


Рис. 22

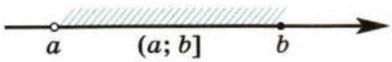


Рис. 23

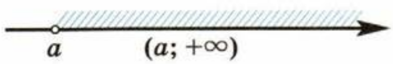


Рис. 24

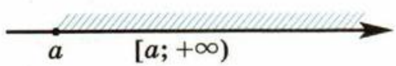


Рис. 25

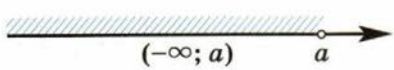


Рис. 26

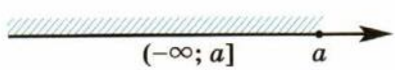


Рис. 27

В дальнейшем нам часто будут встречаться подмножества множества действительных чисел, называемые числовыми промежутками.

Отметим на координатной прямой два действительных числа a и b, из которых a меньше b (рис. 19).

Множество чисел, расположенных между числами a и b, называют *числовым интервалом* или просто *интервалом от a до b*. Его обозначают с помощью круглых скобок: $(a; b)$.

Интервал от a до b показан на рисунке 20 штриховкой. Светлые кружки означают, что числа a и b не принадлежат интервалу $(a; b)$.

Если к интервалу $(a; b)$ добавить числа a и b, то получится числовой промежуток, который называют *числовым отрезком* или просто *отрезком* и обозначают с помощью квадратных скобок: $[a; b]$. Отрезок $[a; b]$ изображён на рисунке 21. Чёрные кружки означают, что числа a и b принадлежат отрезку $[a; b]$.

Если к интервалу $(a; b)$ добавить лишь одно из чисел a или b, то получится ещё два числовых промежутка. Их называют *полуинтервалами* и обозначают с помощью круглой и квадратной скобок: $[a; b)$ и $(a; b]$. Полуинтервалы $[a; b)$ и $(a; b]$ изображены на рисунках 22 и 23.

Отметим на координатной прямой число a. Множество чисел, бóльших числа a (рис. 24), называется *открытым числовым лучом* или просто *открытым лучом* от a до плюс бесконечности и обозначается с помощью круглых скобок: $(a; +\infty)$. Если к этому промежутку добавить число a, то получим *числовой луч* от a до $+\infty$. Его обозначают так: $[a; +\infty)$ (рис. 25).

На рисунках 26 и 27 изображены открытый луч $(-\infty; a)$ и луч $(-\infty; a]$. Числовой промежуток от $-\infty$ до $+\infty$, который состоит из всех действительных чисел, называют *числовой прямой* и обозначают $(-\infty; +\infty)$.

Упражнения

416. Изобразите на координатной прямой числовой промежуток:

а) $(-3; 4)$; в) $(-5; -2]$; д) $(-1; +\infty)$; ж) $[2; +\infty)$;
б) $[-5; 0)$; г) $[1; 6]$; е) $(-\infty; 1)$; з) $(-\infty; -1]$.

417. Задайте неравенством числовые промежутки, изображённые на рисунке 28, и запишите их обозначение.

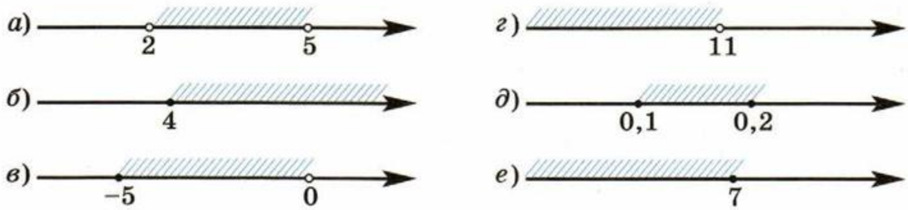


Рис. 28

418. Запишите обозначение числового промежутка, представляющего множество чисел x, таких, что:

а) $-8 < x < -2$; г) $1 < x \leqslant 9$; ж) $x \geqslant 6$;
б) $4 \leqslant x \leqslant 10$; д) $x > 5$; з) $x \leqslant 8$;
в) $-3 \leqslant x < 2$; е) $x < -7$; и) $x \geqslant -4$.

419. Изобразите на координатной прямой промежуток, представляющий множество A, если:

а) $A = \{x | x > -3\}$; г) $A = \{x | 4 < x < 6\}$;
б) $A = \{x | x < 5\}$; д) $A = \{x | 1 \leqslant x < 5\}$;
в) $A = \{x | -1 \leqslant x \leqslant 4\}$; е) $A = \{x | x \geqslant 2\}$.

420. Изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству:

а) $|x| < 2$; в) $|x| \leqslant 3$; д) $|x| < -3$;
б) $|x| > 3$; г) $|x| \geqslant 5$; е) $|x| \geqslant -1$.

421. Какое из множеств $\{x|\ |x| < 4\}$, $\{x|\ |x| \leqslant 3\}$, $\{x|\ |x| > 1\}$ является числовым промежутком? Обозначьте его и изобразите на координатной прямой.

422. Существует ли в промежутке $[6; 15)$ наименьшее число; наибольшее число?

423. Существует ли в промежутке $(-2; 3]$ наименьшее число; наибольшее число?

424. Найдите все целые числа, принадлежащие промежутку:

а) $[-1{,}5;\ 2]$; б) $(-4;\ 4)$; в) $(103;\ 107]$; г) $\left[-\frac{1}{2};\ 3\right)$.

425. Найдите два каких-нибудь дробных числа, принадлежащие интервалу:

а) $(-0{,}5;\ 0{,}5)$; в) $(-0{,}5;\ -0{,}49)$;

б) $\left(1\frac{1}{3};\ 2\frac{1}{2}\right)$; г) $\left(-3\frac{1}{2};\ -3\frac{1}{3}\right)$.

426. Какие из дробей вида $\frac{n}{12}$, где $n \in N$, принадлежат отрезку $\left[\frac{1}{12};\ \frac{1}{2}\right]$?

427. Найдите дроби вида $\frac{1}{n}$, где $n \in N$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{1}{36};\ \frac{1}{4}\right]$.

428. Какие дроби вида $\frac{4}{n}$, где $n \in N$, принадлежат промежутку $\left[\frac{1}{12};\ \frac{1}{6}\right]$?

429. Изобразите на координатной прямой числовой промежуток, являющийся пересечением числовых промежутков:

а) $[-2;\ 3]$ и $(0;\ +\infty)$; в) $(-3;\ 2)$ и $(-\infty;\ -2]$;

б) $(-\infty;\ -2)$ и $[-2;\ 0]$; г) $(-\infty;\ 5)$, $[2;\ +\infty)$ и $(0;\ 5]$.

430. Покажите на координатной прямой числовой промежуток, являющийся объединением числовых промежутков:

а) $[-2;\ 3]$ и $(0;\ +\infty)$; в) $(-3;\ 2)$ и $(-\infty;\ -2]$;

б) $(-\infty;\ -2)$ и $[-2;\ 0]$; г) $(-\infty;\ 5)$ и $(7;\ +\infty)$.

431. Верно ли, что:

а) $[-8;\ 7) \cap [-8;\ 8] = [-8;\ 7]$;

б) $(3;\ 16) \cup (0;\ 24) = (3;\ 24)$;

в) $(-\infty;\ -1) \cup (-2;\ +\infty) = (-\infty;\ +\infty)$;

г) $(-\infty;\ 4) \cap (-4;\ +\infty) = (-4;\ 4)$?

432. Является ли числовым промежутком объединение промежутков:

а) $(-3;\ 5]$ и $[5;\ 12)$; г) $(-7;\ 1)$ и $(-5;\ 3)$;

б) $[-2;\ -1)$ и $(-4;\ -2]$; д) $[2;\ 8]$ и $[3;\ 7]$;

в) $[-1;\ 6)$ и $(6;\ 8]$; е) $[-1;\ 1]$ и $[2;\ 4]$?

Упражнения для повторения

433. Сравните числа:

а) 4,35(7) и 4,3(57); б) −6,5(31) и −6,53(1).

434. Представьте каждое из чисел $1\frac{3}{4}$, $-12\frac{5}{6}$, $-2{,}25$ и $7{,}13$ в виде дроби с целым числителем и натуральным знаменателем.

435. Учащиеся 8 класса, выбирая старосту, определили пять основных кандидатов: Андреева, Борисову, Виктюка, Галкину и Дмитриева. Результаты тайного голосования приведены ниже (фамилии кандидатов сокращены):

Б, Б, В, Г, А, А, Г, В, В, А, Б, Б, Г, Г, А, Д, Д, А, В, А, Д, В, В, Б, А, Г, В, Г, А, Д.

По этим данным составьте таблицу частот.

20. Интервальный ряд данных

В статистических исследованиях важно представлять данные в наглядном, удобном для анализа виде. Одним из таких способов является построение *интервального ряда данных*.

Рассмотрим пример. Учащиеся двух 8 классов по итогам выполнения теста по русскому языку получили баллы, указанные в таблице (0, 1, 2 и 3 балла не получил ни один из учащихся).

Класс	**Баллы**																
	4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
8 «А»	1	0	0	1	1	0	1	2	2	3	3	4	3	2	1	1	0
8 «Б»	0	1	1	0	0	0	0	2	2	4	4	2	2	3	1	2	1

Объединим учащихся, получивших менее 6 баллов, в первую группу, получивших от 6 до 10 баллов — во вторую группу, от 11 до 15 баллов — в третью, более 16 баллов — в четвёртую. Таблица частот в этом случае будет выглядеть так:

Класс	**Группа**			
	Первая (от 1 до 5 баллов)	**Вторая (от 6 до 10 баллов)**	**Третья (от 11 до 15 баллов)**	**Четвёртая (от 16 до 20 баллов)**
8 «А»	1	3	14	7
8 «Б»	1	1	14	9

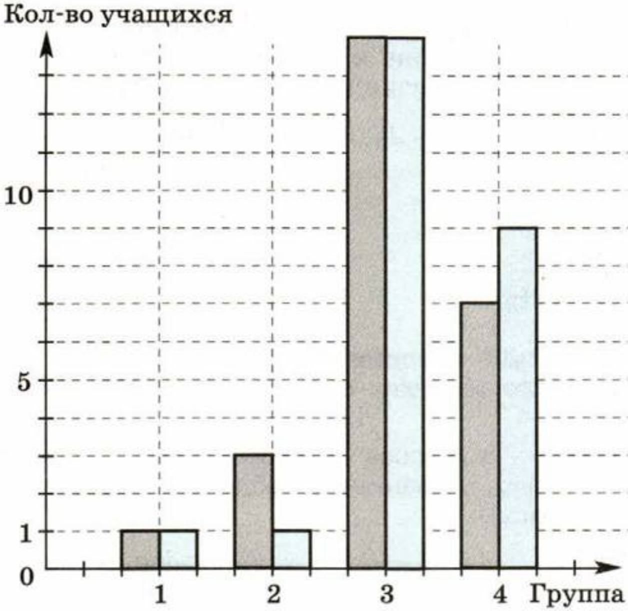


Рис. 29

Изобразив эти данные в виде столбчатой диаграммы (рис. 29), можно сравнить результаты, полученные учащимися двух классов (серый столбик на рисунке — результаты, полученные учащимися 8 «А» класса, цветной — учащимися 8 «Б» класса).

Вообще, если исследуют большое количество вариант, то удобно сначала провести их группировку, а затем заменить выборку интервальным рядом. Для этого разность между наибольшим и наименьшим значениями ряда данных делят на равные части и, округляя полученный результат, определяют длину интервала. В нашем случае наибольшее количество баллов, которое могли получить учащиеся, равно 20, а наименьшее — 0. Следовательно, разделив разность 20 − 0 = 20 на 4, получим длину каждого интервала, равную 5 баллам. За начало первого интервала часто выбирают наименьшую варианту или ближайшее к ней целое число, расположенное левее. Для каждого интервала указывают количество данных, попавших в этот интервал. При этом граничное число обычно относят к следующему интервалу.

В некоторых случаях для анализа статистических данных используют не таблицу частот, а таблицу отношений частот к общему числу данных в ряду. Это отношение, обычно выраженное в процентах, называют <u>*относительной частотой варианты*</u>. В нашем примере *таблица относительных частот* будет иметь вид:

Класс	Группа			
	Первая	**Вторая**	**Третья**	**Четвёртая**
8 «А»	4	12	56	28
8 «Б»	4	4	56	36

Поскольку сумма частот равна объёму ряда, то сумма относительных частот составляет 100 %. Это полезно помнить для самопроверки.

Заметим, что, говоря о статистике, мы до сих пор чаще всего рассматривали этап обработки полученных данных. Несколько слов стоит сказать и об этапе сбора статистических данных.

Проведение любого массового исследования, будь то организация тестовой проверки всех учащихся целого региона или опрос населения о работе жилищно-коммунального хозяйства, требует больших усилий и финансовых затрат. В тех случаях, когда бывает сложно или даже невозможно провести сплошное исследование, его заменяют выборочным: из всей изучаемой совокупности данных, называемой *генеральной совокупностью*, выделяют определённую часть, т. е. составляют выборочную совокупность данных — *выборку*. Именно она подвергается статистической обработке и исследованию.

Выборочное исследование проводят ещё и тогда, когда проведение сплошного исследования связано с порчей или полным уничтожением продукции. Например, исследование повреждений автомобиля при столкновении с неподвижным препятствием (так называемый *crash-test*) проводят не для всех экземпляров, выпущенных за месяц, а для одного (изредка для нескольких). Такое исследование даёт возможность внести в конструкцию автомобиля изменения, повышающие его прочность.

Добавим, что выборка должна быть представительной, *репрезентативной* (от французского слова *représentatif* — показательный), т. е. достаточной по объёму и отражающей характерные особенности всей генеральной совокупности.

Упражнения

436. У учащихся 8 класса измерили рост и получили следующие результаты (в сантиметрах):

164; 176; 177; 180; 181; 179; 175; 180; 176; 165; 162; 168; 157; 185; 176; 160; 162; 158; 181; 179; 168; 164; 179; 163; 160; 176; 162; 178; 164; 182.

Представьте эти данные в виде интервального ряда, взяв в качестве длины интервала: а) 5 см; б) 10 см. Для каждого интервального ряда постройте столбчатую диаграмму.

437. При изучении учебной нагрузки учащихся 8 классов попросили отметить время, которое они в определённый день затратили на выполнение домашних заданий. Получили следующие данные (с точностью до 0,1 ч):

2,6; 3,4; 3,2; 2,9; 1,9; 1,5; 1,8; 4,2; 1,6; 3,4; 3,2; 3,1; 2,5; 2,7; 3,1; 2,9; 2,8; 1,5; 3,1; 3,4; 2,2; 2,8; 4,1; 2,4; 4,3; 1,9; 3,6; 2; 2,8; 3,9.

Представьте полученные данные в виде интервального ряда с длиной интервала 1 ч и составьте соответствующую таблицу относительных частот.

438. Проведите статистическое исследование в своём классе, выяснив среднее время, затрачиваемое каждым учащимся на путь от дома до школы. Полученные результаты запишите в виде интервального ряда данных. Заменив каждый интервал его серединой, найдите среднее время, затрачиваемое учащимися класса на путь от дома до школы.

439. Учащимся 8 классов небольшого города была предложена контрольная работа по алгебре, состоявшая из шести заданий. При подведении итогов была составлена таблица, в которой было указано количество учащихся, верно выполнивших одно, два, три и т. д. задания. Пользуясь этой таблицей, составьте таблицу относительных частот.

Количество выполненных заданий	0	1	2	3	4	5	6
Количество учащихся	0	7	33	87	223	146	54

440. На столбчатой диаграмме (рис. 30) представлены данные о распределении рабочих цеха по возрастным группам. Пользуясь данной диаграммой, найдите:

а) число рабочих цеха в возрасте от 28 до 33 лет;
б) число рабочих цеха в возрасте до 33 лет;
в) общее число рабочих цеха;
г) самую многочисленную возрастную категорию рабочих цеха.

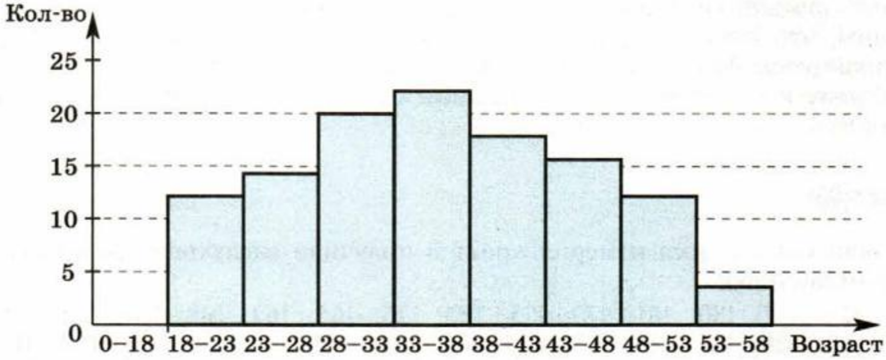


Рис. 30

441. Является ли выборка репрезентативной (представительной), если при изучении влияния телевизионной рекламы на спрос потребителей были опрошены:

а) юноши в возрасте от 18 до 28 лет;
б) пенсионеры;
в) все члены садового товарищества?

Упражнения для повторения

442. Решите уравнение:

а) $(2x - 3)(3x + 2) = 0$;
б) $(2x - 3)(3x + 2) = -6$;
в) $(2x - 3)(3x + 2) = 6x^2$.

443. Упростите выражение $\left(\frac{x}{2y - 3x} + \frac{2xy}{9x^2 - 4y^2}\right) : \left(\frac{2y - 3x}{2y + 3x} - 1\right)$.

444. Два автомобиля, расстояние между которыми 315 км, выехали навстречу друг другу. Скорость первого автомобиля 50 км/ч, а второго — в 1,2 раза больше. Найдите время, через которое автомобили встретятся, если известно, что второй автомобиль успел сделать остановку на 15 мин до встречи с первым автомобилем.

21. Абсолютная и относительная погрешность

В вычислениях на практике используют, как правило, десятичные дроби с ограниченным числом десятичных знаков. Если дробь бесконечная или содержит слишком много десятичных знаков, её округляют. Например, иррациональное число π, которое выражается бесконечной десятичной непериодической дробью 3,1415926536..., в зависимости от решаемой задачи округляют до десятых, сотых, тысячных и т. д. Получают различные приближённые значения π, например: 3,1; 3,14; 3,142; 3,1416; 3,14159.

Найдём по графику функции $y = 0{,}6x + 1{,}3$ (рис. 31) её приближённое значение при $x = 1{,}7$; 3,6:

если $x = 1{,}7$, то $y \approx 2{,}3$;
если $x = 3{,}6$, то $y \approx 3{,}5$.

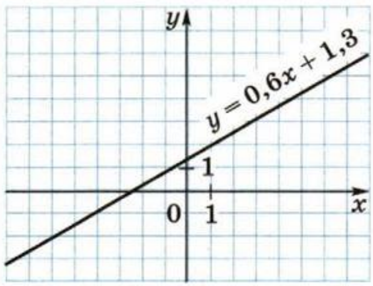


Рис. 31

По формуле $y = 0{,}6x + 1{,}3$ можно найти точные значения функции при тех же значениях аргумента:

если $x = 1{,}7$, то $y = 2{,}32$;
если $x = 3{,}6$, то $y = 3{,}46$.

Приближённые значения отличаются от точных значений на некоторое положительное число. В первом случае оно равно разности между точным и приближённым значениями, а во втором — разности между приближённым значением и точным:

$$2{,}32 - 2{,}3 = 0{,}02; \quad 3{,}5 - 3{,}46 = 0{,}04.$$

Можно сказать, что точные значения отличаются от приближённых на модуль разности между ними, так как

$$|2{,}32 - 2{,}3| = 0{,}02; \quad |3{,}46 - 3{,}5| = 0{,}04.$$

Модуль этой разности называют *абсолютной погрешностью* приближённого значения.

Определение. Абсолютной погрешностью приближённого значения называется модуль разности точного и приближённого значений.

В рассмотренном примере абсолютная погрешность приближённого значения 2,3 равна 0,02, а абсолютная погрешность приближённого значения 3,5 равна 0,04.

Приведём другие примеры.

Пример 1. Округлим десятичную дробь 76,2961 до сотых и найдём абсолютную погрешность приближённого значения.

Выполнив округление, получим:

$$76{,}2961 \approx 76{,}30.$$

Найдём абсолютную погрешность:

$$|76{,}2961 - 76{,}30| = 0{,}0039.$$

Значит, абсолютная погрешность приближённого значения 76,30 равна 0,0039.

Пример 2. Округлим десятичную запись числа π до десятых и найдём абсолютную погрешность приближённого значения.

Известно, что π равно 3,1415926536... . При округлении до десятых получаем:

$$\pi = 3{,}1415926536... \approx 3{,}1.$$

Вычислим абсолютную погрешность:

$$|\pi - 3{,}1| = 0{,}0415926536... .$$

Вместо полученного результата со многими цифрами берут оценку абсолютной погрешности с одной или двумя цифрами, не считая 0 целых и другие нули, предшествующие первой, отличной от нуля цифре. В нашем случае можно взять число 0,05, полученное при округлении абсолютной погрешности до сотых с избытком. Говорят, что $\pi \approx 3{,}1$ с *точностью* до 0,05.

Заметим, что при округлении любой десятичной дроби до десятых получаем приближённое значение с точностью до 0,05, при округлении до сотых — с точностью до 0,005 и т. д. Вообще при округлении десятичной дроби до некоторого разряда получаем приближённое значение с точностью до 5 единиц следующего разряда. Часто используют более грубую оценку. Считают, что при округлении десятичной дроби до некоторого разряда получают приближённое значение с точностью до одной единицы этого разряда. В нашем примере 3,1 есть приближённое значение числа π с точностью до 0,1.

Во многих случаях, так же как и в примере 2, невозможно найти абсолютную погрешность приближённого значения, так как неизвестно точное значение. Примером могут служить результаты, получаемые при измерении длин, промежутков времени, масс и других величин.

Вообще, если $x \approx a$ и $|x - a| \leqslant h$, то a есть приближённое значение x с точностью до h.

Измерив линейкой с миллиметровой шкалой толщину H монеты и её диаметр D (в сантиметрах), получаем:

$$H \approx 0{,}2 \text{ с точностью до } 0{,}1;$$
$$D \approx 2{,}5 \text{ с точностью до } 0{,}1.$$

При измерении толщины монеты абсолютная погрешность может составить половину приближённого значения, тогда как при измерении диаметра она не может быть более 0,04 приближённого значения, так как:

$$0{,}1 : 0{,}2 = 0{,}5; \quad 0{,}1 : 2{,}5 = 0{,}04.$$

Можно сказать, что качество второго измерения значительно выше качества первого. Качество измерения характеризуют *относительной погрешностью*.

Определение. Относительной погрешностью приближённого значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближённого значения.

Для приближённых значений толщины и диаметра монеты невозможно вычислить относительную погрешность, так как в этом случае неизвестна абсолютная погрешность. Однако мы уже оценили сверху относительную погрешность. Для приближённого значения 0,2 она меньше или равна 0,5, а для приближённого значения 2,5 — меньше или равна 0,04. Эту оценку обычно, как и относительную погрешность, выражают в процентах. Так как 0,5 = 50 % и 0,04 = 4 %, то

$H \approx 0{,}2$ с относительной точностью до 50 %;
$D \approx 2{,}5$ с относительной точностью до 4 %.

Пример 3. Округлим дробь 50,1 до единиц и вычислим относительную погрешность полученного приближённого значения.

При округлении десятичной дроби до единиц получаем:

$$50{,}1 \approx 50.$$

Найдём абсолютную погрешность:

$$|50{,}1 - 50| = 0{,}1.$$

Теперь можно найти относительную погрешность:

$$\frac{0{,}1}{|50|} = 0{,}002 = 0{,}2\,\%.$$

Значит,

$$50{,}1 \approx 50 \text{ с относительной погрешностью } 0{,}2\,\%.$$

Упражнения

445. Округлите дроби 21,84 и 7,56 сначала до десятых, затем до единиц и найдите абсолютную погрешность каждого приближения.

446. Вычислите абсолютную погрешность приближённого значения, полученного при округлении дроби:

а) 0,385 до десятых; в) 25,62 до единиц;
б) 1,044 до сотых; г) 761,3 до десятков.

447. Представьте число $\frac{100}{3}$ в виде десятичной дроби и округлите дробь до единиц, десятых и сотых. Найдите абсолютную погрешность каждого приближённого значения.

448. Найдите по графику функции $y = x^2$ (рис. 32) приближённые значения y при $x = 0{,}8;\ 1{,}3;\ 2{,}5$. Вычислите абсолютную погрешность каждого приближённого значения.

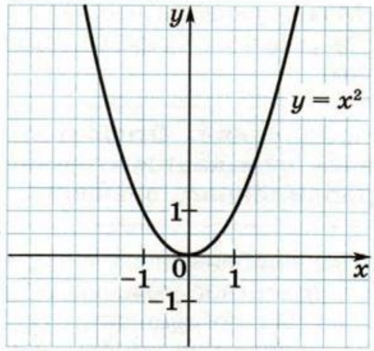


Рис. 32

449. Найдите приближённое значение длины каждого отрезка (рис. 33) и укажите его точность.

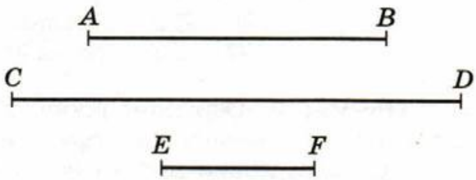


Рис. 33

450. За одну поездку израсходовали более трёх, но менее четырёх литров бензина. Укажите точность приближённого значения израсходованного бензина, если за приближённое значение принять:

а) 3 л;
б) 4 л;
в) среднее арифметическое 3 л и 4 л.

451. На митинге присутствовало более 20 тыс. и менее 30 тыс. человек. Какое число является более точным приближённым значением числа людей, присутствовавших на митинге? Укажите точность этого приближённого значения.

452. Каждую из десятичных дробей 0,45; 2,53 и 31,98 округлите до десятых и вычислите абсолютную и относительную погрешности приближённых значений.

453. Запишите $2\frac{12}{25}$ в виде десятичной дроби, округлите получившуюся дробь до единиц и до десятых. Вычислите для каждого приближённого значения абсолютную и относительную погрешности.

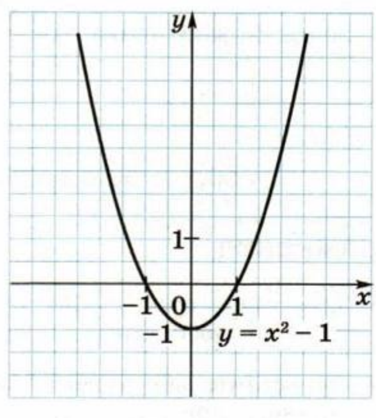


Рис. 34

454. Найдите по графику функции $y = x^2 - 1$ (рис. 34) приближённые значения y при $x = 1{,}8;\ -1{,}5$. Вычислите относительную погрешность каждого из приближённых значений.

455. Рост человека приближённо равен 175 см с точностью до 1 см. Оцените относительную погрешность.

456. Площадь Белого моря приближённо равна 90 тыс. км^2 (с точностью до 500 км^2). Оцените относительную погрешность приближённого значения.

457. Измерили толщину проволоки L и расстояние l от Земли до Луны. Получили результаты: $L \approx 2{,}4$ мм с точностью до 0,1 мм; $l \approx 384\,400$ км с точностью до 50 км. Сравните точности измерений, оценив относительные погрешности.

Упражнения для повторения

458. Представьте каждое из чисел $2\frac{7}{8}$; $-1\frac{3}{5}$; 3,25; $-7{,}5$ и -6 в виде отношения целого и натурального чисел.

459. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{3}{1-x+x^2}+\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{3}{1+x^3}\right)\left(x-\dfrac{2x-1}{1+x}\right)$;

б) $\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{y^2}{x^3-xy^2}\right):\dfrac{x^3+y^3}{x^2-xy}$.

460. Известно, что $a + b - c = \alpha$ и $ab - ac - bc = \beta$. Выразите $a^2 + b^2 + c^2$ через α и β.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие числа образуют множество рациональных чисел? Какие числа представляют множество бесконечных десятичных периодических дробей? Как обозначается множество рациональных чисел?

2. Какие числа называются действительными? Как обозначается множество действительных чисел?

3. Какие числа называют иррациональными числами?

4. Какие действительные числа можно представить в виде дроби с целым числителем и натуральным знаменателем?

5. Приведите примеры различных промежутков, запишите их с помощью скобок и изобразите на координатной прямой.

6. Объясните, как заменить выборку интервальным рядом данных.

7. Что называют относительной частотой варианты?

8. Сформулируйте определение абсолютной погрешности приближённого значения.

9. Что означает запись $x \approx a$ с точностью до h?

10. Сформулируйте определение относительной погрешности приближённого значения.

11. Что означает запись $x \approx a$ с относительной точностью до $\alpha\,\%$?

§ 7. Арифметический квадратный корень. Функция $y = \sqrt{x}$

22. Арифметический квадратный корень

Задача. Площадь квадрата равна 729 см^2. Чему равна сторона квадрата?

Допустим, что сторона квадрата равна x см, тогда его площадь равна x^2 см^2. По условию задачи площадь квадрата равна 729 см^2. Значит, $x^2 = 729$.

С помощью таблицы квадратов двузначных чисел, помещённой на форзаце в конце учебника, найдём, что одним из корней уравнения $x^2 = 729$ является число 27. Очевидно, что другим его корнем служит противоположное число, т. е. число -27.

Условию задачи соответствует только положительный корень. Итак, сторона квадрата равна 27 см.

Решая задачу, мы составили уравнение вида $x^2 = a$, где a — некоторое число. Выясним, сколько корней имеет уравнение такого вида в зависимости от значения a.

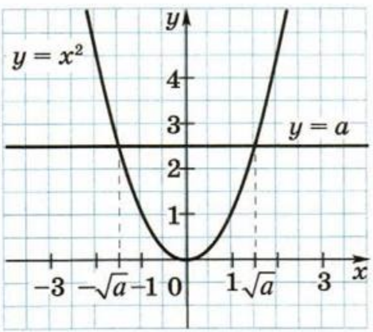


Рис. 35

Если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ не имеет корней, так как квадрат любого числа является неотрицательным числом.

Если $a = 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет единственный корень — число 0.

Если $a > 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет два корня. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся графиком функции $y = x^2$ (рис. 35). При $a > 0$ прямая $y = a$ пересекает параболу в двух точках, симметричных относительно оси y. Обозначим абсциссы точек пересечения x_1 и x_2. Тогда $x_1^2 = a$ и $x_2^2 = a$, т. е. числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения, причём $x_1 = -x_2$.

Корень уравнения $x^2 = a$ называют *квадратным корнем из a*. Например, каждое из чисел 27 и -27 является квадратным корнем из 729.

Вообще

! квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a.

Неотрицательный квадратный корень из числа получил специальное название — *арифметический квадратный корень*.

Определение. **Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.**

Для арифметического квадратного корня из a принято обозначение: $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{}$ называют *знаком арифметического квадратного корня* или *знаком радикала* (от лат. *rādīx* — корень), а выражение, записанное под знаком корня, — подкоренным выражением. Запись $\sqrt{a}$ читают так: «арифметический квадратный корень из a». Иногда для краткости слово «арифметический» при чтении опускают. Знак радикала, похожий на современный, появился у нидерландского математика Альберта Жирара в 1626 г., а современное обозначение арифметического квадратного корня впервые встречается в работе Рене Декарта «Рассуждение о методе» (1637).

Мы показали, что если $a \geqslant 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет неотрицательный корень, т. е. при любом $a \geqslant 0$ существует неотрицательное число, квадрат которого равен a. Иначе говоря,

! при *любом* $a \geqslant 0$ *выражение* $\sqrt{a}$ *имеет смысл. Если* $a < 0$, *то выражение* $\sqrt{a}$ *не имеет смысла.*

Приведём примеры нахождения значения арифметического квадратного корня, или, как говорят иначе, *извлечения* арифметического квадратного корня из числа:

$\sqrt{81} = 9$, так как 9 — неотрицательное число и $9^2 = 81$,

$\sqrt{0{,}0144} = 0{,}12$, так как 0,12 — неотрицательное число и $0{,}12^2 = 0{,}0144$.

$\sqrt{0} = 0$, так как 0 — неотрицательное число и $0^2 = 0$.

В рассмотренных примерах значение выражения $\sqrt{a}$ является рациональным числом. Однако значение этого выражения может быть иррациональным числом. Например, раньше было показано, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. Значит, $\sqrt{2}$ — иррациональное число. Иррациональными числами являются также значения выражений $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{6{,}2}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{7} + \sqrt{2}$ и т. п.

Можно доказать, что

! если натуральное число a не является квадратом какого-либо натурального числа, то $\sqrt{a}$ — иррациональное число.

Из определения арифметического корня следует, что

! если выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл, то $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Найдём, например, значение выражения $-0{,}5\left(\sqrt{13}\right)^2$. Так как $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$, то $-0{,}5\left(\sqrt{13}\right)^2 = -0{,}5 \cdot 13 = -6{,}5$.

Упражнения

461. Постройте график функции $y = x^2$ и с его помощью решите уравнение:

а) $x^2 = 1$; в) $x^2 = 4$;
б) $x^2 = 3$; г) $x^2 = -1$.

462. Решите уравнение:

а) $0{,}3x^2 = 1{,}2$; б) $-0{,}2x^2 = 1{,}8$; в) $0{,}7x^2 = 0$.

463. Верно ли, что:

а) $\sqrt{36} = 6$; в) $\sqrt{4{,}9} = 0{,}7$;

б) $\sqrt{5\frac{4}{9}} = 2\frac{1}{3}$; г) $\sqrt{0{,}01} = -0{,}1$?

464. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{6400}$; г) $-\sqrt{0{,}0001}$; ж) $-\frac{1}{15}\sqrt{0{,}09}$;

б) $\sqrt{0{,}25}$; д) $0{,}7\sqrt{0{,}81}$; з) $\frac{5}{22}\sqrt{1{,}21}$;

в) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; е) $\frac{1}{12}\sqrt{3600}$; и) $-1{,}2\sqrt{\frac{49}{144}}$.

465. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, если $a = 1$, $b = 0{,}64$;

б) $\sqrt{a - b}$, если $a = 1$, $b = 0{,}64$;

в) $2\sqrt{a + 4b}$, если $a = 0{,}12$, $b = 0{,}01$;

г) $\sqrt{3a - b}$, если $a = 0{,}6$, $b = 0{,}8$;

д) $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, если $a = 0{,}7$, $b = 0{,}09$;

е) $-\sqrt{a - \sqrt{b}}$, если $a = 4{,}8$, $b = 0{,}64$.

466. Пользуясь таблицей квадратов двузначных чисел, найдите:

а) $\sqrt{256}$; г) $-\sqrt{2916}$; ж) $\sqrt{\sqrt{6561}}$;

б) $\sqrt{1369}$; д) $0{,}5\sqrt{4356}$; з) $-\sqrt{\sqrt{2401}}$;

в) $\sqrt{4761}$; е) $\frac{1}{3}\sqrt{5625}$; и) $-\sqrt{2 + \sqrt{9604}}$.

467. Верно ли, что:

а) $\sqrt{2,89}=1,7$; г) $\sqrt{0,64}>0,7$;

б) $-\sqrt{2\frac{1}{4}}=-1,5$; д) $-\sqrt{0,36}<-0,7$;

в) $\sqrt{0,09}=-0,3$; е) $-\sqrt{0,04}<-0,1$?

468. Докажите, что иррациональным является число:

а) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{3}-1$;

б) $\sqrt{3}$; г) $\sqrt{5}+1$.

469. Запишите три каких-либо значения b, при которых значение выражения $\sqrt{3b-1}$ является:

а) рациональным числом;

б) иррациональным числом.

470. Найдите значение выражения:

а) $(\sqrt{7})^2$; в) $-(\sqrt{11})^2$; д) $-0,3(\sqrt{2,7})^2$;

б) $(\sqrt{0,8})^2$; г) $-(\sqrt{3,6})^2$; е) $(-0,2\sqrt{0,6})^2$.

471. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{3^2+4^2-5^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\sqrt{1\frac{24}{25}}-\sqrt{(-1)^2}}$;

б) $\sqrt{13^2-12^2-5^2}+\sqrt{\sqrt{1\frac{9}{16}}+\sqrt{(-1)^2}}-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$.

472. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{-36}$; в) $\sqrt{(-0,1)^2}$; д) $\sqrt{(-0,4)^{2n}}$, где $n \in N$;

б) $-\sqrt{36}$; г) $\sqrt{(-1)^7}$; е) $\sqrt{(-1,6)^{2n+3}}$, где $n \in N$?

473. При каких значениях a имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{(-a)^2}$; в) $\sqrt{(a-4)^2}$; д) $\sqrt{4a^2+4a+11}$;

б) $\sqrt{-a^2}$; г) $\sqrt{a^2+6}$; е) $\sqrt{-9a^2+6a-1}$?

474. Сократите дробь:

а) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{12}{\sqrt{6}}$; д) $\frac{12}{5\sqrt{6}}$;

б) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$; г) $\frac{21}{\sqrt{7}}$; е) $-\frac{35}{2\sqrt{7}}$.

475. Разложите на множители выражение:

а) $7-\sqrt{7}$; в) a^2-10;

б) $62-\sqrt{31}$; г) $19-64b^2$.

476. Сократите дробь:

а) $\frac{a^2-2}{a-\sqrt{2}}$; в) $\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}}$; д) $\frac{a^2+2a\sqrt{3}+3}{a+\sqrt{3}}$;

б) $\frac{x^2-7}{x+\sqrt{7}}$; г) $\frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$; е) $\frac{4b^2-4b\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}-2b}$.

477. Докажите, что если $a>1$, то $\sqrt{a+\frac{a}{a^2-1}}=a\sqrt{\frac{a}{a^2-1}}$.

Из данных выражений $\sqrt{3\frac{3}{8}}$; $\sqrt{4\frac{4}{15}}$; $\sqrt{5\frac{5}{26}}$; $\sqrt{6\frac{6}{35}}$; $\sqrt{7\frac{7}{50}}$; $\sqrt{8\frac{8}{23}}$ выберите те, которые можно преобразовать, используя это тождество, и выполните преобразование.

478. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x}=3$; в) $\sqrt{x}-16=0$;

б) $3\sqrt{x}=1{,}5$; г) $0{,}1\sqrt{x}+9=0$.

479. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-3}=2{,}5$; в) $\sqrt{x-4}-0{,}6=0$;

б) $\sqrt{2+x}=-1{,}7$; г) $3\sqrt{6+x}+0{,}9=0$.

480. Найдите корни уравнения или докажите, что их нет:

а) $\sqrt{3+\sqrt{x}}=2$; в) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=2$;

б) $\sqrt{5-\sqrt{x}}=1$; г) $\sqrt{2+\sqrt{5-\sqrt{x}}}=2$.

481. Решите уравнение, разложив левую часть на множители:

а) $x - 2\sqrt{x} = 0$; в) $x - 2 - \sqrt{x-2} = 0$;

б) $2x - \sqrt{x} = 0$; г) $2x + 2 - \sqrt{x+1} = 0$.

482. Зная, что переменные принимают только положительные значения, выразите из формулы:

а) $d = 4{,}1\sqrt{h}$ переменную h; в) $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$ переменную h;

б) $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ переменную a; г) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ переменную l.

Упражнения для повторения

483. Докажите, что при $a > 10$ выражение $a - \frac{16}{a-5} \cdot \frac{25-a^2}{a-10}$ принимает положительные значения.

484. Сократите дробь:

а) $\frac{36-b^2}{5b^2+60b+180}$; б) $\frac{3a^5-3a^3}{2a-a^2-1}$; в) $\frac{a^2+4b^2+2ab}{56b^3-7a^3}$.

485. Докажите, что множество натуральных степеней числа 3 замкнуто относительно умножения и незамкнуто относительно сложения.

23. Вычисление и оценка значений квадратных корней. Стандартное отклонение

Рассмотрим один из приёмов нахождения приближённых значений арифметического квадратного корня. Этот приём основан на следующей теореме.

Теорема. Если $a > b > 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Доказательство. Так как по условию $a > b$, то $a - b > 0$. Поскольку $a > 0$ и $b > 0$, то $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$ и $b = \left(\sqrt{b}\right)^2$. Следовательно, $a - b = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$. Поскольку $a - b > 0$, то $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) > 0$. По определению арифметического квадратного корня и учитывая, что $a > 0$ и $b > 0$, будем иметь $\sqrt{a} > 0$ и $\sqrt{b} > 0$. Тогда $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$. Но произведение двух множителей положительно, если множители имеют одинаковый знак, т. е. если $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$, то и $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$. И тогда $\sqrt{a}>\sqrt{b}$, что и требовалось доказать.

Используя доказанную теорему, можно вычислять приближённые значения корня с одним, двумя, тремя и т. д. знаками после запятой. Покажем это на примере $\sqrt{2}$.

Найдём сначала два последовательных натуральных числа, между которыми заключён $\sqrt{2}$. Так как

$$1^2 < 2 < 2^2,$$

то

$$1<\sqrt{2}<2.$$

Числа 1 и 2 — приближённые значения $\sqrt{2}$ с точностью до 1, первое — с недостатком, а второе — с избытком.

Будем теперь последовательно возводить в квадрат числа 1,1; 1,2; 1,3; ...; 1,9, пока не получим число, большее 2:

$$1{,}1^2 = 1{,}21;\ 1{,}2^2 = 1{,}44;\ 1{,}3^2 = 1{,}69;\ 1{,}4^2 = 1{,}96;\ 1{,}5^2 = 2{,}25.$$

Значит,

$$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2,$$

т. е.

$$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5.$$

Числа 1,4 и 1,5 — приближённые значения $\sqrt{2}$ с точностью до 0,1 с недостатком и с избытком соответственно.

Далее будем возводить в квадрат числа 1,41; 1,42; 1,43; ...; 1,49, пока не встретится число, большее 2. Выполняя вычисления, найдём, что

$$1{,}41^2 = 1{,}9881 \text{ и } 1{,}42^2 = 2{,}0164,$$

т. е.

$$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2.$$

Отсюда

$$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42.$$

Мы нашли, что приближёнными значениями $\sqrt{2}$ с точностью до 0,01 являются числа 1,41 (с недостатком) и 1,42 (с избытком).

Возводя последовательно в квадрат числа 1,411; 1,412; 1,413; ...; 1,419, найдём, что

$$1{,}414^2 = 1{,}999396;\ 1{,}415^2 = 2{,}002225,$$

т. е.

$$1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2.$$

Отсюда

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415.$$

Мы нашли приближённые значения $\sqrt{2}$ с точностью до 0,001 — это числа 1,414 (с недостатком) и 1,415 (с избытком). Продолжая тот же процесс, найдём, что

$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143,$$

$$1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$$

и т. д.

Рассматривая последнее двойное неравенство, можно сказать, что бесконечная десятичная дробь, представляющая собой число $\sqrt{2}$, начинается так: 1,41421..., т. е.

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots .$$

Для нахождения приближённого значения арифметического квадратного корня с заданной точностью используют и другие приёмы. Ещё в Древнем Вавилоне для вычисления приближённых значений квадратных корней использовалось правило, записываемое формулой

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

Например, $\sqrt{26} = \sqrt{5^2 + 1} \approx 5 + \frac{1}{2 \cdot 5} = 5{,}1.$ Однако вычисление квадратных корней с более высокой точностью оказывается достаточно трудоёмким. Поэтому в практических расчётах для нахождения приближённого значения арифметического квадратного корня применяют специальные таблицы или электронно-вычислительные машины.

Арифметический квадратный корень используется в описательной статистике для вычисления классической характеристики разброса ряда данных — *стандартного отклонения*. Стандартное отклонение — это арифметический квадратный корень из дисперсии ряда данных. Приведём пример применения стандартного отклонения для исследования ряда данных.

Пример 1. На некоторой фармацевтической фабрике автоматы производят таблетки массой 300 мг. При проверке двух автоматов было проведено точное взвешивание 10 таблеток, произведённых каждым автоматом. Результаты взвешивания показаны в таблицах.

Результаты взвешивания таблеток, выпущенных первым автоматом:

Номер таблетки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Масса таблетки (мг)	295	291	301	297	304	302	296	296	305	299

Результаты взвешивания таблеток, выпущенных вторым автоматом:

Номер таблетки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Масса таблетки (мг)	293	295	295	294	292	294	296	295	293	292

Сравним точность работы каждого автомата.

Среднее значение массы таблеток, выпускаемых первым автоматом, равно 298,6, что всего на 1,4 мг отличается от необходимого значения массы таблетки.

Среднее значение массы таблеток, выпускаемых вторым автоматом, равно 293,9 мг, что отличается от необходимого значения на 6,1 мг.

Запишем в таблицу отклонения массы таблеток от их среднего арифметического для каждого автомата и вычислим квадраты отклонений.

Отклонения массы таблеток, выпущенных первым автоматом:

Номер таблетки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Масса таблетки (мг)	295	291	301	297	304	302	296	296	305	299
Отклонение (мг)	–3,6	–7,6	2,4	–1,6	5,4	3,4	–2,6	–2,6	6,4	0,4
Квадрат отклонения	12,96	57,76	5,76	2,56	29,16	11,56	6,76	6,76	40,96	0,16

Отклонения массы таблеток, выпущенных вторым автоматом:

Номер таблетки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Масса таблетки (мг)	293	295	295	294	292	294	296	295	293	292
Отклонение (мг)	–0,9	1,1	1,1	0,1	–1,9	0,1	2,1	1,1	–0,9	–1,9
Квадрат отклонения	0,81	1,21	1,21	0,01	3,61	0,01	4,41	1,21	0,81	3,61

Найдём стандартное отклонение первого ряда данных как квадратный корень из среднего арифметического квадратов отклонений $\sqrt{17,44} \approx 4,2$. Стандартное отклонение второго ряда будет равно $\sqrt{1,69} \approx 1,3$.

Полученные стандартные отклонения говорят о том, что разброс массы таблеток, выпущенных первым автоматом, приблизительно в 3 раза больше этой же характеристики второго автомата. Исходя из этого, можно предположить, что износ деталей первого автомата значительно больше, тогда как второй автомат всего лишь нуждается в незначительной регулировке.

В статистике приняты следующие обозначения. Если среднее арифметическое ряда данных

$$x_1,\ \ x_2,\ \ x_3,\ \ \ldots,\ \ x_n$$

обозначить как $\bar{x}$, то отклонения вариант от среднего арифметического запишутся в виде

$$x_1 - \bar{x},\ \ x_2 - \bar{x},\ \ x_3 - \bar{x},\ \ \ldots,\ \ x_n - \bar{x},$$

а дисперсия, обозначаемая обычно как S^2, будет вычисляться по формуле

$$S^2 = \frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_3 - \bar{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \bar{x}\right)^2}{n}.$$

Тогда стандартное отклонение для данного ряда данных можно находить по формуле

$$S = \sqrt{\frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_3 - \bar{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \bar{x}\right)^2}{n}}.$$

Используя введенные обозначения, сформулируем свойства среднего арифметического, дисперсии и стандартного отклонения.

Увеличим каждую варианту ряда данных на одно и то же число и рассмотрим ряд $x_1 + a,\ \ x_2 + a,\ \ x_3 + a,\ \ \ldots,\ \ x_n + a$. Тогда:

1. Среднее арифметическое нового ряда данных увеличится на число a, т. е. будет равно $\bar{x} + a$.

2. Дисперсия и стандартное отклонение нового ряда данных не изменятся.

Умножим каждую варианту ряда данных на число k и рассмотрим ряд $kx_1,\ \ kx_2,\ \ kx_3,\ \ \ldots,\ \ kx_n$. Тогда:

1. Среднее арифметическое нового ряда будет равно $k\bar{x}$;

2. Дисперсия нового ряда будет равна k^2S^2;

3. Стандартное отклонение будет равно kS.

Докажите эти свойства самостоятельно.

Упражнения

486. Сравните числа:

а) $\sqrt{1{,}5}$ и $\sqrt{1\frac{1}{3}}$; в) $5{,}8$ и $\sqrt{34}$; д) $0{,}72$ и $\sqrt{0{,}5}$;

б) $\sqrt{6{,}2}$ и $\sqrt{6\frac{2}{7}}$; г) $-\sqrt{17}$ и -4; е) $-\sqrt{0{,}7}$ и $-0{,}8$.

487. Расположите в порядке возрастания числа: 6; $\sqrt{35}$; $\sqrt{47}$; $-1{,}7$; $-\sqrt{3}$; 0.

488. Расположите в порядке убывания числа: $-\sqrt{2{,}3}$; $\sqrt{5\frac{1}{6}}$; 0; $\sqrt{5{,}3}$; $-\sqrt{2\frac{1}{3}}$; $-1{,}5$.

489. Верно ли, что:

а) $3 < \sqrt{10} < 4$; б) $1{,}1 < \sqrt{1{,}56} < 1{,}2$?

490. С помощью таблицы квадратов двузначных чисел найдите два последовательных натуральных числа, между которыми заключено число:

а) $\sqrt{115}$; в) $\sqrt{2003}$; д) $\sqrt{6143}$;

б) $\sqrt{501}$; г) $\sqrt{3015}$; е) $\sqrt{9005}$.

491. Подберите два последовательных натуральных числа, между которыми заключено число:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{8{,}6}$; в) $\sqrt{50{,}2}$; г) $\sqrt{132{,}4}$.

492. Найдите цифры единиц, десятых и сотых в десятичной записи числа:

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$.

493. Используя формулу $\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a}$, найдите приближённое значение арифметического квадратного корня:

а) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt{15}$; в) $\sqrt{50}$; г) $\sqrt{12}$.

494. Найдите приближённое значение арифметического квадратного корня:

а) $\sqrt{4\frac{7}{8} + \sqrt{17}}$; в) $\sqrt{10\sqrt{24}}$;

б) $\sqrt{\sqrt{24} - 0{,}9}$; г) $\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{4}}$.

495. Даны два ряда данных: 1; 2; 3; 4; 5 и -5; -2; 3; 7; 12. Сравните их стандартное отклонение.

496. На чаеразвесочной фабрике дозировочные автоматы насыпают в каждую коробку 100 г чая. Отдел технического контроля регулярно следит за тем, чтобы масса чая, засыпаемого в коробку, отличалась от нормы не более чем на 5 %. Для этого проводится контрольное взвешивание коробок чая, насыпанного каким-либо автоматом-дозатором. В таблице приведены результаты взвешивания 10 коробок чая, насыпанных двумя автоматами. Опираясь на данные таблиц, определите, какой из автоматов работает более точно.

Коробка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-й автомат	98,3	98,8	100,1	99,1	100,3	100,2	99,4	99,6	101,2	100,3
2-й автомат	98,5	99,7	99,9	98,8	99,1	99,3	100,2	98,6	97,8	100,1

497. Дан ряд чисел 2, 3, 7. Найдите его среднее арифметическое, дисперсию и стандартное отклонение. Используя полученные результаты, найдите среднее арифметическое, дисперсию и стандартное отклонение ряда:

а) 4; 5; 9; б) 1; 2; 6; в) 111; 112; 116.

498. Дан ряд чисел 2, 5, 11. Найдите его среднее арифметическое, дисперсию и стандартное отклонение. Используя полученные результаты, найдите среднее арифметическое, дисперсию и стандартное отклонение ряда:

а) 8; 20; 44; б) 50; 125; 275; в) 28; 70; 154.

Упражнения для повторения

499. Упростите выражение: $\left(1+\frac{3x+1}{5x-1}\cdot\frac{5x^2-x}{6x^2-3xy-y+2x}+\frac{6x^2-2y^2+xy}{y^2-4x^2}\right)\cdot\frac{2x^2-xy}{y}$.

500. Постройте график функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$. Найдите:

а) значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 0,5; 1,5; 2,5;

б) множество значений аргумента, при которых значение функции меньше 4, но больше 1.

501. Упростите выражение:

а) $\frac{a^3\cdot(-a^3)^4}{a^{11}}$; б) $\frac{a^4\cdot(-a^5)^2}{a^9}$; в) $\frac{24a^2b\cdot(0{,}5ab^2)^3}{3a^4b^5}$.

24. Функция $y = \sqrt{x}$ и её график

Выражение $\sqrt{x}$ имеет смысл при любом неотрицательном значении x, причём любому неотрицательному действительному числу соответствует единственное значение этого выражения. Значит, формула $y = \sqrt{x}$ задаёт функцию, областью определения которой является множество всех неотрицательных чисел, т. е. $D(y) = [0; +\infty)$.

Рассмотрим свойства функции $y = \sqrt{x}$ и особенности её графика.

1. Если $x = 0$, то $y = 0$, если $x > 0$, то $y > 0$, т. е. на всей области определения функция принимает неотрицательные значения.

Это свойство непосредственно следует из определения арифметического квадратного корня. Геометрически оно означает, что график функции проходит через начало координат и расположен в первой координатной четверти.

2. Большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, причём $x_2 > x_1$. Обозначим через y_1 и y_2 соответствующие значения функции. Тогда по теореме, доказанной в предыдущем пункте, из условия $x_2 > x_1 \geqslant 0$ следует, что $\sqrt{x_2} > \sqrt{x_1}$. Значит, $y_2 > y_1$.

3. Областью значений функции является множество всех неотрицательных действительных чисел, т. е. $E(y) = [0; +\infty)$.

В самом деле, из определения арифметического квадратного корня следует, что любое значение функции $y = \sqrt{x}$ является неотрицательным действительным числом. Покажем теперь, что любое неотрицательное действительное число m является значением функции. Из равенства $\sqrt{x} = m$, где $m \geqslant 0$, следует, что $x = m^2$. Значит, при $x = m^2$ функция $y = \sqrt{x}$ принимает значение, равное m, где $m \geqslant 0$, т. е. число m принадлежит области значений функции. Таким образом, областью значений функции является множество всех неотрицательных действительных чисел.

Геометрически это означает, что любая прямая $y = m$, где $m \geqslant 0$, пересекает график, причём только в одной точке.

Построим график функции $y = \sqrt{x}$. Для этого составим таблицу значений функции (с точностью до 0,1).

x	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0,7	1	1,2	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3

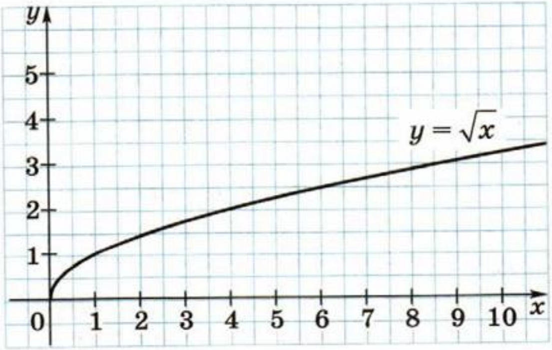


Рис. 36

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых занесены в таблицу. Проведя через эти точки плавную линию, получим график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 36).

Выясним, каково взаимное расположение графиков функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$, где $x \geqslant 0$. Если a и b — неотрицательные действительные числа и $b = \sqrt{a}$, то $b^2 = a$. Это означает, что если точка с координатами $(a; b)$ принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$, то точка с координатами (b; a) принадлежит графику функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$. Верно и обратное: если точка (b; a), где $b \geqslant 0$ и $a \geqslant 0$, принадлежит графику функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, то точка (a; b) принадлежит графику функций $y = \sqrt{x}$.

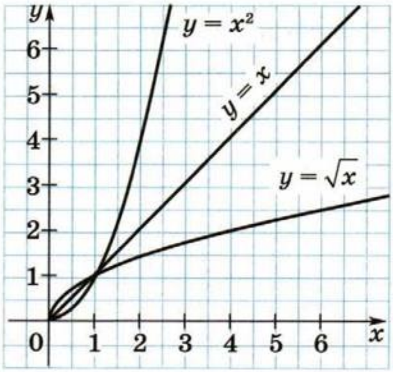


Рис. 37

Так как точки с координатами (a; b) и (b; a) симметричны относительно прямой $y = x$, то отсюда вытекает, что каждой точке графика функции $y = \sqrt{x}$ соответствует симметричная ей относительно прямой $y = x$ точка графика функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, и наоборот: каждой точке графика $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, соответствует точка графика функции $y = \sqrt{x}$, симметричная ей относительно прямой $y = x$. Отсюда следует, что графики функций

$$y = \sqrt{x} \text{ и } y = x^2, \text{ где } x \geqslant 0,$$

симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 37).

Таким образом, график функции $y = \sqrt{x}$ — «лежачая» полупарабола, расположенная в первой координатной четверти и симметричная относительно прямой $y = x$ полупараболе, которая является графиком функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$.

Упражнения

502. Пользуясь графиком функции $y = \sqrt{x}$ (см. рис. 36), найдите:

а) значение функции при x, равном 1,5; 6,5; 7,5;

б) при каком значении аргумента значение функции равно 1,5; 2; 2,5.

503. Пользуясь графиком функции $y = \sqrt{x}$ (см. рис. 36), найдите:

а) значение $\sqrt{x}$, если $x = 2$; 6; 8;

б) значение x, при котором $\sqrt{x} = 0{,}8$; 1,7; 2,6.

504. Функция задана формулой $y = \sqrt{x}$. Найдите приближённое значение y, если x равен 10; 120; 200.

505. Пользуясь таблицей значений функции $y=\sqrt{x}$, составленной для построения её графика, найдите с точностью до 0,1 приращение, которое функция получает при возрастании x:

а) от 1 до 3; б) от 3 до 5; в) от 5 до 7.

Сравните результаты.

506. С помощью формулы $\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a}$ найдите приближённое значение приращения, которое функция $y=\sqrt{x}$ получает при возрастании аргумента:

а) от 10 до 20; б) от 1200 до 1210.

Сравните результаты

507. Из данных точек $A(-36; 6)$, $B(0{,}81; 0{,}9)$, $C(1{,}96; 1{,}4)$, $D(1{,}21; 1{,}1)$, $E(0{,}0625; 0{,}25)$ выберите те, которые принадлежат графику функции $y=\sqrt{x}$.

508. Пересекает ли график функции $y=\sqrt{x}$ прямая:

а) $x=36$; б) $x=100$; в) $y=36$; г) $y=100$; д) $y=-16$?

При положительном ответе укажите координаты точки пересечения.

509. Найдите координаты точки пересечения графика функции $y=\sqrt{x}$ и прямой:

а) $x=4$; б) $x=0{,}81$; в) $y=4$; г) $y=0{,}81$.

510. Пересекаются ли графики функций:

а) $y=\sqrt{x}$ и $y=-x-8$; б) $y=\sqrt{x}$ и $y=x$?

511. Изобразите схематически график функции:

а) $y=-\sqrt{x}$; б) $y=\sqrt{-x}$; в) $y=\sqrt{|x|}$.

512. Докажите, что графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=x+0{,}5$ не имеют общих точек.

Упражнения для повторения

513. Найдите значение выражения:

а) $3\sqrt{1{,}44}-(-0{,}3\sqrt{7})^2$; б) $(-2\sqrt{1{,}8})^2-4(\sqrt{0{,}81})^2$.

514. Известно, что m — рациональное число, не равное 0. Является ли рациональным или иррациональным число:

а) $7m^2+4$; в) $\frac{m^4-m^2+5}{m}$; б) $m^3-\sqrt{5}$; г) $\frac{m^6+\sqrt{7}}{m}$?

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение арифметического квадратного корня. Имеет ли смысл выражение $\sqrt{(-4)^2}$, $-\sqrt{4^2}$, $\sqrt{-4}$?

2. Объясните на примере числа $\sqrt{3}$, как можно найти первые три цифры в десятичной записи этого числа.

3. Укажите область определения функции $y=\sqrt{x}$ и сформулируйте её свойства. Какие особенности графика этой функции вытекают из указанных свойств?

4. Каково взаимное расположение в координатной плоскости графиков функций $y=\sqrt{x}$ и $y = x^2$, где $x \geqslant 0$?

§ 8. Свойства арифметического квадратного корня

25. Квадратный корень из произведения, дроби и степени

Нетрудно проверить, что каждое из равенств

$$\sqrt{4 \cdot 25}=\sqrt{4} \cdot \sqrt{25}, \qquad \sqrt{\frac{36}{49}}=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}}, \qquad \sqrt{3^4}=3^2$$

является верным.

Докажем теоремы, выражающие соответствующие свойства арифметического квадратного корня (в формулировках теорем для краткости вместо «арифметический квадратный корень» будем говорить просто «квадратный корень»).

Теорема 1. Квадратный корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению квадратных корней из этих множителей, т. е.

$$\text{если} \quad a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad \text{то} \quad \sqrt{ab}=\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доказательство. При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ выражение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ имеет смысл и принимает неотрицательные значения. При этом

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2=ab.$$

Значит, по определению арифметического квадратного корня, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доказанная теорема распространяется на случай, когда рассматривается корень из произведения трёх и более множителей.

Теорема 2. Квадратный корень из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем равен частному от деления квадратного корня из числителя на квадратный корень из знаменателя, т. е.

$$\text{если} \quad a \geqslant 0, \quad b > 0, \quad \text{то} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доказательство. Если $a \geqslant 0$, $b > 0$, то выражение $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ имеет смысл и неотрицательно. Покажем, что квадрат этого выражения равен $\frac{a}{b}$. Действительно,

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Значит, по определению арифметического квадратного корня

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

что и требовалось доказать.

Тождества, выражающие свойства квадратного корня из произведения и дроби, часто используют в вычислениях и преобразованиях, поменяв в них местами левую и правую части:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{при } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{при } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0.$$

Теорема 3. При любом значении a и натуральном k верно равенство

$$\sqrt{a^{2k}} = |a^k|.$$

Доказательство. Начнём со случая, когда $k = 1$, т. е. докажем сначала, что

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Если $a \geqslant 0$, то по определению квадратного корня $\sqrt{a^2} = a$ и по определению модуля $|a| = a$. Если $a < 0$, то по определению арифметического квадратного корня $\sqrt{a^2} = -a$ и по определению модуля $|a| = -a$. Значит, в любом случае равенство $\sqrt{a^2} = |a|$ верно.

Применив теперь доказанное тождество к выражению $\sqrt{a^{2k}}$, где $k \in N$, получим:

$$\sqrt{a^{2k}} = \sqrt{\left(a^k\right)^2} = \left|a^k\right|,$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Вычислим значение выражения:

а) $\sqrt{128 \cdot 18}$; б) $\sqrt{\frac{4,9}{8,1}}$; в) $\sqrt{(-2)^{10}}$; г) $\sqrt{21\,609}$.

Воспользуемся доказанными теоремами.

а) Применим теорему о корне из произведения:

$$\sqrt{128 \cdot 18} = \sqrt{64 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2} = \sqrt{64 \cdot 9 \cdot 4} = 8 \cdot 3 \cdot 2 = 48.$$

б) Применив теорему о корне из дроби, получим:

$$\sqrt{\frac{4,9}{8,1}} = \sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}.$$

в) По теореме о корне из степени имеем:

$$\sqrt{(-2)^{10}} = \left|(-2)^5\right| = 2^5 = 32.$$

г) Представим подкоренное выражение в виде произведения степеней простых множителей и применим теоремы о корне из произведения и степени:

$$\sqrt{21\,609} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{7^4} = 3 \cdot 7^2 = 147.$$

Заметим, что значение корня можно найти иначе, выделив в подкоренном выражении множитель 9 и используя таблицу квадратов двузначных чисел.

Пример 2. Упростим выражение:

а) $\sqrt{a^{10}}$ при $a < 0$; б) $\sqrt{16x^8y^6}$ при $x > 0$, $y < 0$.

Применим доказанные теоремы.

а) По теореме о корне из степени имеем:

$$\sqrt{a^{10}} = \left|a^5\right|.$$

Так как $a < 0$, то $a^5 < 0$ и, значит, $\left|a^5\right| = -a^5$.

Получаем, что при $a < 0$

$$\sqrt{a^{10}} = \left|a^5\right| = -a^5.$$

б) Применяя теоремы о корне из произведения и степени, получим:

$$\sqrt{16x^8y^6} = 4\left|x^4\right| \cdot \left|y^3\right|.$$

Так как $|x^4| = x^4$ при любом x и $|y^3| = -y^3$ при $y < 0$, то

$$\sqrt{16x^8y^6} = 4|x^4| \cdot |y^3| = -4x^4y^3.$$

Пример 3. Докажем, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ — иррациональное.

Допустим, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=m$, где m — рациональное число. Тогда

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=m-\sqrt{5},$$

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=\left(m-\sqrt{5}\right)^2,$$

$$2+2\sqrt{6}+3=m^2-2m\sqrt{5}+5,$$

$$2\sqrt{6}+2m\sqrt{5}=m^2,$$

$$\left(2\sqrt{6}+2m\sqrt{5}\right)^2=m^4,$$

$$24+8m\sqrt{30}+20m^2=m^4.$$

Так как $m \neq 0$, то отсюда $\sqrt{30}=\dfrac{m^4-20m^2-24}{8m}$.

Получаем, что иррациональное число равно рациональному числу. Полученное противоречие показывает, что предположение неверно, и, значит, число m — иррациональное.

Упражнения

515. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{0{,}0001 \cdot 16}$; б) $\sqrt{0{,}0049 \cdot 8100}$; в) $\sqrt{0{,}64 \cdot 144}$.

516. Вычислите значение корня:

а) $\sqrt{\dfrac{1{,}44}{3{,}61}}$; в) $\sqrt{1\dfrac{13}{36} \cdot 3\dfrac{13}{36}}$; д) $\sqrt{\dfrac{1}{9} \cdot 0{,}04 \cdot 64}$;

б) $\sqrt{11\dfrac{1}{9}}$; г) $\sqrt{\dfrac{1}{144} \cdot 2\dfrac{2}{49}}$; е) $\sqrt{1\dfrac{9}{16} \cdot 2\dfrac{1}{4} \cdot 2\dfrac{7}{9}}$.

517. Пользуясь таблицей квадратов двузначных чисел, найдите значение выражения:

а) $\sqrt{19\,600}$; г) $\sqrt{46{,}24}$; ж) $\sqrt{2{,}89 \cdot 81}$;

б) $\sqrt{280\,900}$; д) $\sqrt{0{,}1444}$; з) $\sqrt{0{,}04 \cdot 98{,}01}$;

в) $\sqrt{\dfrac{81}{529}}$; е) $\sqrt{\dfrac{729}{7921}}$; и) $\sqrt{\dfrac{1{,}44}{47{,}61}}$.

518. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{50 \cdot 98}$; в) $\sqrt{2{,}5 \cdot 12{,}1}$; д) $\sqrt{3{,}2 \cdot 7{,}2 \cdot 49}$;

б) $\sqrt{32 \cdot 128}$; г) $\sqrt{17 \cdot 51 \cdot 27}$; е) $\sqrt{2{,}5 \cdot 12{,}5 \cdot 20}$.

519. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{50^2 - 14^2}$; в) $\sqrt{34^2 - 16^2}$; д) $\sqrt{2{,}9^2 - 2{,}1^2}$;

б) $\sqrt{\dfrac{61^2 - 60^2}{81}}$; г) $\sqrt{\dfrac{74^2 - 24^2}{121}}$; е) $\sqrt{\dfrac{6{,}2^2 - 5{,}9^2}{2{,}43}}$.

520. Представьте выражение в виде произведения двух корней:

а) $\sqrt{2ab}$, где $a > 0$, $b > 0$; в) $\sqrt{7axy}$, где $a < 0$, $x < 0$, $y > 0$;

б) $\sqrt{5xy}$, где $x < 0$, $y < 0$; г) $\sqrt{ax + bx}$, где $a < 0$, $b < 0$, $x < 0$.

521. Представьте выражение в виде частного двух корней:

а) $\sqrt{\dfrac{3a}{b}}$, где $a < 0$, $b < 0$; б) $\sqrt{\dfrac{a}{xy}}$, где $a < 0$, $x < 0$, $y > 0$.

522. Вычислите:

а) $\sqrt{6^4}$; в) $\sqrt{(-5)^6}$; д) $\sqrt{(-1)^{4n}}$, где $n \in N$;

б) $\sqrt{(-8)^4}$; г) $\sqrt{(0{,}1)^6}$; е) $\sqrt{(-1)^{4n+6}}$, где $n \in N$.

523. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{a^2}$ при $a = 6{,}5$; $8{,}3$; $-0{,}1$;

б) $\sqrt{a^4}$ при $a = 3$; 1; $-0{,}1$;

в) $\sqrt{a^6}$ при $a = 1$; -2; $0{,}1$.

524. Верно ли равенство:

а) $\sqrt{(-6)^8} = 6^4$; в) $\sqrt{(-5)^{4n}} = (-5)^{2n}$, где $n \in N$;

б) $\sqrt{(-9)^6} = (-9)^3$; г) $\sqrt{(-2)^{4n+2}} = (-2)^{2n+1}$, где $n \in N$?

525. Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt{5^2 \cdot 7^2}$; б) $\sqrt{2^4 \cdot 3^6}$; в) $\sqrt{2^2 \cdot 5^2}$; г) $\sqrt{10^2 \cdot 6^6}$.

526. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{\dfrac{7^2}{8^2}}$; б) $\sqrt{\dfrac{2^4}{3^6}}$; в) $\sqrt{\dfrac{2^8}{5^2}}$; г) $\sqrt{\dfrac{(-1)^4}{6^2}}$.

527. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{11\,664}$; в) $\sqrt{65\,536}$; д) $\sqrt{46\,656}$; ж) $\sqrt{211\,600}$;

б) $\sqrt{50\,625}$; г) $\sqrt{35\,721}$; е) $\sqrt{30\,276}$; з) $\sqrt{164\,025}$.

528. Замените выражение тождественно равным:

а) $\sqrt{b^2}$; б) $\sqrt{x^4}$; в) $3\sqrt{a^8}$; г) $5\sqrt{a^6}$; д) $\sqrt{49a^{10}}$.

529. Преобразуйте выражение, зная, что $b > 0$:

а) $\sqrt{b^{10}}$; в) $\sqrt{64b^6}$; д) $12b^6\sqrt{4b^2}$;

б) $\sqrt{b^8}$; г) $b^2\sqrt{b^8}$; е) $-b\sqrt{b^8}$.

530. Преобразуйте выражение, зная, что $a < 0$:

а) $\sqrt{a^8}$; в) $\sqrt{a^6}$; д) $-a\sqrt{25a^6}$;

б) $\sqrt{a^{12}}$; г) $6a\sqrt{a^{10}}$; е) $-\sqrt{36a^{14}}$.

531. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a^4b^6}$, если $b > 0$;

б) $\sqrt{a^{12}b^{26}}$, если $b < 0$;

в) $\sqrt{81x^{12}y^8}$;

г) $a^7\sqrt{a^6b^{12}}$, если $a > 0$;

д) $ab\sqrt{a^4b^2}$, если $b < 0$;

е) $-\sqrt{a^8y^{16}}$, если $y < 0$.

532. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\frac{1,69a^8}{b^2}}$, если $b < 0$; б) $\sqrt{\frac{0,16a^{14}}{b^{12}}}$, если $a > 0$.

533. Найдите значение произведения:

а) $\sqrt{1,8} \cdot \sqrt{0,2}$; в) $\sqrt{500} \cdot \sqrt{3,2}$; д) $\sqrt{500} \cdot \sqrt{1,25}$;

б) $\sqrt{1,5} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$; г) $\sqrt{1\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{0,72}$; е) $\sqrt{7\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{66}$.

534. Найдите значение частного:

а) $\frac{\sqrt{10,8}}{\sqrt{0,3}}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}}$; в) $\frac{\sqrt{2,84}}{\sqrt{0,71}}$; г) $\frac{\sqrt{6,5}}{\sqrt{58,5}}$.

535. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{2}\right)3\sqrt{2} - 0,75\sqrt{6}$; б) $(0,5\sqrt{6} - \sqrt{3})4\sqrt{3} - 2\sqrt{18}$.

536. Упростите выражение:

а) $\left(2\sqrt{1,2}-\sqrt{1,5}\right)^2+4\sqrt{1,8}$; б) $20\sqrt{0,42}-\left(5\sqrt{0,7}+2\sqrt{0,6}\right)^2$.

537. Решите уравнение:

а) $\left(\sqrt{6x}-2\right)^2=\sqrt{3}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{12}\right)+6x$;

б) $\left(\sqrt{7x}-2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7x}+2\sqrt{5}\right)=7x-\sqrt{2}\left(\sqrt{5x}-\sqrt{72}\right)$.

538. Докажите, что является иррациональным число:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$; б) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; в) $\sqrt{7}+\sqrt{6}+1$; г) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$.

539. Докажите, что если $a>0$, $b>0$, то:

а) $\left(\sqrt{ab}-\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{1}{ab}}\right)\sqrt{ab}=(a-1)(b-1)$;

б) $\dfrac{2a\sqrt{ab}+a^2\sqrt{b}+2b\sqrt{ab}+ab\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}+a\sqrt{b}}=a+b$;

в) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\left(\sqrt{ab}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+\frac{a+b}{b}=a+b$.

Упражнения для повторения

540. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{(-0,6)^3}$; б) $\sqrt{3,6\cdot 2,4-3}$; в) $\sqrt{1-(-0,7)^2}$?

541. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}2x-y=3,\\ x+2y=-1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x+2y=1,\\ x-3y=4.\end{cases}$

26. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

Вы познакомились с различными преобразованиями выражений, содержащих квадратные корни. К ним относятся: представление корня из произведения в виде произведения корней, а корня из дроби — в виде частного корней; умножение и деление корней; извлечение корня из степени. Рассмотрим теперь другие примеры тождественных преобразований выражений, содержащих квадратные корни.

1. Вынесение множителя за знак корня.

Пусть требуется упростить выражение

$$\sqrt{3}+\sqrt{75}.$$

Для этого представим число 75 в виде произведения, в котором один из множителей является квадратом натурального числа, и применим теорему о корне из произведения. Получим:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

Мы представили $\sqrt{75}$ в виде произведения чисел 5 и $\sqrt{3}$. В таких случаях говорят, что мы вынесли множитель за знак корня.

Теперь можно упростить данное выражение:

$$\sqrt{3} + \sqrt{75} = \sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

2. Внесение множителя под знак корня.

Сравним значения выражений $2\sqrt{10}$ и $\sqrt{41}$.

Представим в выражении $2\sqrt{10}$ множитель 2 в виде арифметического квадратного корня и выполним умножение корней:

$$2\sqrt{10} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{40}.$$

Мы заменили произведение $2\sqrt{10}$ выражением $\sqrt{40}$. В таких случаях говорят, что мы внесли множитель под знак корня.

Теперь можно сравнить данные выражения. Так как $\sqrt{40} < \sqrt{41}$, то $2\sqrt{10} < \sqrt{41}$.

Заметим, что под знак корня можно вносить только неотрицательный множитель. Например, выражение $-5\sqrt{2}$ можно преобразовать, внося под знак корня множитель 5:

$$-5\sqrt{2} = -\left(5\sqrt{2}\right) = -\sqrt{25 \cdot 2} = -\sqrt{50}.$$

Выражение $a\sqrt{15}$, где $a < 0$, можно преобразовать, внося под корень положительный множитель $-a$:

$$a\sqrt{15} = -(-a)\sqrt{15} = -\sqrt{15a^2}.$$

3. Освобождение от иррациональности в знаменателе или в числителе дроби.

Пусть требуется преобразовать дробь $\frac{5}{\sqrt{6}}$ так, чтобы её знаменатель не содержал корней. Для этого умножим её числитель и знаменатель на $\sqrt{6}$. Получим:

$$\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}.$$

В таких случаях говорят, что мы освободились от иррациональности в знаменателе дроби.

Освободимся теперь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Если разность $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ умножить на сумму $\sqrt{5}+\sqrt{3}$, то получится выражение, не содержащее корней. Умножив числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{5}+\sqrt{3}$, получим:

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}.$$

Аналогичным образом можно освободиться от иррациональности в числителе дроби.

Рассмотренные в данной главе различные преобразования выражений, содержащих квадратные корни, находят применение при решении широкого круга задач. Приведём примеры.

Пример 1. Найдём наибольшее значение дроби $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{5}}{a-5}$.

Представим знаменатель дроби в виде разности квадратов, воспользовавшись тем, что $a \geqslant 0$. Получим:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{5}}{a-5} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{5}}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{5}}{(\sqrt{a}-\sqrt{5})(\sqrt{a}+\sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{5}}.$$

Дробь $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{5}}$ принимает наибольшее значение, когда её знаменатель является наименьшим, т. е. при $a = 0$. Если $a = 0$, то $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Значит, наибольшее значение дроби равно $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Найдём приближённое значение выражения $\frac{1}{\sqrt{5}}$ по формуле

$$\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

Получим:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{0{,}2} = \sqrt{0{,}25-0{,}05} = \sqrt{0{,}5^2-0{,}05} \approx 0{,}5 - \frac{0{,}05}{2\cdot 0{,}5} = 0{,}45.$$

Пример 2. Упростим выражение $\dfrac{\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{a-b} + \dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$.

Упростим числитель первой дроби, воспользовавшись формулой суммы кубов двух выражений:

$$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = a-\sqrt{ab}+b.$$

Поскольку первая и последняя дроби данного выражения имеют одинаковый знаменатель, то сначала найдём разность этих двух дробей:

$$\frac{a-\sqrt{ab}+b}{a-b}-\frac{\sqrt{ab}}{a-b}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{a-b}.$$

Заметим, что разность $a - b$ можно представить как разность квадратов $\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2$, так как по условию $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $a \neq b$. Тогда полученная дробь после сокращения будет равна $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Остаётся выполнить последнее действие:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=1.$$

Упражнения

542. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{98}$; б) $\sqrt{16a}$; в) $\sqrt{18c}$; г) $\sqrt{200p}$.

543. Вынесите множитель за знак корня:

а) $5\sqrt{18}$; в) $\frac{1}{3}\sqrt{72a}$; д) $-8\sqrt{8y}$;

б) $-6\sqrt{54}$; г) $0{,}2\sqrt{50x}$; е) $-\sqrt{0{,}03b}$.

544. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{5x^4}$; в) $\sqrt{8x^{12}}$; д) $\sqrt{2x^2}$, где $x > 0$;

б) $\sqrt{17a^8}$; г) $\sqrt{18y^8}$; е) $\sqrt{3a^2}$, где $a < 0$.

545. Упростите выражение:

а) $\sqrt{5a}-\sqrt{20a}+\sqrt{125a}$; в) $1{,}2\sqrt{40b^5}-3{,}4\sqrt{160b^5}+\sqrt{250b^5}$;

б) $6\sqrt{12x^3}+4\sqrt{75x^3}-\sqrt{27x^3}$; г) $\frac{2}{3}\sqrt{72a^7}-\frac{1}{4}\sqrt{200a^7}+2\sqrt{8a^7}$.

546. Внесите множитель под знак корня:

а) $5\sqrt{3}$; в) $0{,}1\sqrt{30}$; д) $c\sqrt{10b}$, где $c > 0$;

б) $7\sqrt{2}$; г) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$; е) $x^3\sqrt{7a}$, где $x < 0$.

547. Представьте данное выражение в виде арифметического квадратного корня или выражения, ему противоположного:

а) $0{,}2\sqrt{5}$; в) $4\sqrt{3a}$; д) $3a\sqrt{x}$, если $a < 0$;

б) $-6\sqrt{3}$; г) $-7\sqrt{x}$; е) $-7b\sqrt{a}$, если $b > 0$.

548. Расположите в порядке возрастания числа: $\sqrt{78}$; $6\sqrt{2}$; $5\sqrt{3}$; $4\sqrt{6}$; $2\sqrt{17}$.

549. Расположите в порядке убывания числа: $-3\sqrt{5}$; $3\sqrt{7}$; $-2\sqrt{11}$; $7\sqrt{2}$; $5\sqrt{3}$.

550. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{a}{3\sqrt{5}}$; в) $\frac{6}{\sqrt{a+b}}$; д) $\frac{16}{\sqrt{a}+\sqrt{6}}$;

б) $\frac{4b}{5\sqrt{c}}$; г) $\frac{4}{\sqrt{x-y}}$; е) $\frac{a}{\sqrt{c}-4}$.

551. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{18}{2\sqrt{3}+3}$; в) $\frac{16}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$; д) $\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}}$;

б) $\frac{11}{3\sqrt{5}-1}$; г) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; е) $\frac{1}{\sqrt{15}-\sqrt{10}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

552. Освободитесь от иррациональности в числителе дроби:

а) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$; б) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; в) $\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$; г) $\frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$.

553. Известно, что a, b, $\sqrt{ab}$ — рациональные числа. Верно ли утверждение, что рациональным является также число:

а) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})$; б) $\sqrt{\frac{a}{b}}$; в) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$?

554. Известно, что x, y, $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ — рациональные числа. Докажите, что $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ также являются рациональными числами.

555. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{8a}-\sqrt{\frac{a}{2}}\right)-\left(8\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{2a}\right)$;

б) $\left(\sqrt{\frac{9x}{2}}+\sqrt{50x}-\sqrt{8x}\right)-\left(\sqrt{18x}-5\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$;

в) $\left(x-2\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\left(x+\frac{2}{x}\sqrt{xy}\right)$, если $x > 0$, $y > 0$.

556. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2x}+3\sqrt{8x}=1-\sqrt{2x}$; в) $6\sqrt{3x}+5\sqrt{48x}-15=7\sqrt{27x}$;

б) $\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{2x}{9}}+\sqrt{\frac{x}{8}}=\frac{1}{6}$; г) $\sqrt{\frac{x}{3}}+\sqrt{\frac{3x}{16}}+3\sqrt{\frac{x}{27}}=\frac{11}{12}$.

557. Докажите, что числа являются противоположными:

а) $2-\sqrt{5}$ и $\frac{1}{\sqrt{5}+2}$; б) $\sqrt{3}-2$ и $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

558. Докажите, что числа являются взаимно обратными:

а) $3-2\sqrt{2}$ и $3+\sqrt{8}$; б) $7-\sqrt{48}$ и $\sqrt{49}+4\sqrt{3}$.

559. Найдите, при каком a дробь принимает наибольшее значение, и вычислите это значение:

а) $\frac{\sqrt{a}-5}{a-25}$; б) $\frac{\sqrt{a}-4}{a-16}$; в) $\frac{3-\sqrt{a+4}}{5-a}$; г) $\frac{\sqrt{a+1}-3}{a-8}$.

560. Докажите тождество:

а) $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)=4a$;

б) $\sqrt{x}+\frac{2\sqrt{xy}+y\sqrt{x}-x\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}=\sqrt{y}+2$;

в) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):\left(\frac{3a-3b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2=\frac{1}{9}$;

г) $\left(\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(6b-6a)^2}=\frac{1}{36\sqrt{a}-36\sqrt{b}}$.

561. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{a}{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\frac{a}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{2a}{b}$;

б) $\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+4}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+4}}\right)\cdot\sqrt{\frac{x}{x+4}}$;

в) $\left(\frac{x+\sqrt{x^2-2x}}{x-\sqrt{x^2-2x}}-\frac{x-\sqrt{x^2-2x}}{x+\sqrt{x^2-2x}}\right)\cdot\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$;

г) $\left(\frac{\sqrt{x}}{y-\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy}+y}\right):\frac{2\sqrt{xy}}{x^2-2xy+y^2}-\sqrt{y}$.

562. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1}{a+\sqrt{2}}-\frac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{a-\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{a}\right)$; б) $\left(\frac{1}{a-\sqrt{3}}-\frac{a^2+6}{a^3-3\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{a+\sqrt{3}}{3}\right)$.

563. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1}{\sqrt{a-1}}+\frac{1}{\sqrt{a+1}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}$, если $a=\frac{b^2+c^2}{2bc}$, $c>0$, $b>0$, $b>c$;

б) $\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, если $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, $a>0$, $b>0$, $a>b$.

Упражнения для повторения

564. При делении некоторого целого числа на 26 получили остаток 17. Какой остаток получится при делении этого числа на 13?

565. Докажите тождество: $\left(\frac{1}{27b^3}+\frac{1}{a^3}\right)\left(\frac{a^2-3ab}{3ab-a^2-9b^2}+1\right)=\frac{a+3b}{3a^3b}$.

566. Решите уравнение:

а) $(2x-1)(3x+2)=3x+2$; б) $(3x-1)(2x+3)=2(2x+3)$.

27. Преобразование двойных радикалов

Выражение вида $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$, где a, b и c — некоторые числа, называется *двойным* или *сложным радикалом*.

При преобразовании выражений, содержащих двойные радикалы, часто бывает удобно освободиться в двойном радикале от внешнего радикала.

Если подкоренное выражение представляет собой полный квадрат, то освободиться от внешнего радикала можно с помощью тождества $\sqrt{a^2}=|a|$.

Пример 1. Освободимся от внешнего радикала в выражении $\sqrt{21-8\sqrt{5}}$.

Попытаемся представить выражение $21-8\sqrt{5}$ в виде квадрата разности, рассматривая 21 как сумму квадратов чисел, а $8\sqrt{5}$ — как их удвоенное произведение. Выражение $8\sqrt{5}$ можно представить, например, как удвоенное произведение чисел 2 и $2\sqrt{5}$ или чисел 4 и $\sqrt{5}$. Проверка убеждает нас, что именно в последнем случае сумма квадратов чисел равна 21.

Значит, $\sqrt{21-8\sqrt{5}}=\sqrt{\left(4-\sqrt{5}\right)^2}=\left|4-\sqrt{5}\right|$.

Так как $4>\sqrt{5}$, то $\left|4-\sqrt{5}\right|=4-\sqrt{5}$. Итак, мы получим, что

$$\sqrt{21-8\sqrt{5}}=4-\sqrt{5}.$$

В некоторых случаях удаётся освободиться от внешнего радикала с помощью _формулы двойного радикала_:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

где a и b — некоторые числа, причём $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a^2 - b \geqslant 0$. Впервые эти формулы упоминаются в X книге «Начал» Евклида.

Нетрудно убедиться в справедливости этой формулы. Действительно, при указанных условиях правая часть равенства представляет собой выражение, которое имеет смысл и принимает неотрицательное значение. Докажем, что квадрат этого выражения равен $a \pm \sqrt{b}$.

В самом деле,

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2 = \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} \pm 2\cdot\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b)}{4}} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} =$$

$$= \frac{a+\sqrt{a^2-b} \pm 2\sqrt{b} + a - \sqrt{a^2-b}}{2} = a \pm \sqrt{b}.$$

Справедливость формулы доказана.

В тех случаях, когда разность $a^2 - b$ является точным квадратом, формула двойного радикала позволяет освободиться от внешнего радикала.

Пример 2. Освободимся от внешнего радикала в выражении

$$\sqrt{75-\sqrt{3024}}.$$

По формуле двойного радикала имеем:

$$\sqrt{75-\sqrt{3024}} = \sqrt{\frac{75+\sqrt{2601}}{2}} - \sqrt{\frac{75-\sqrt{2601}}{2}} = \sqrt{\frac{75+51}{2}} - \sqrt{\frac{75-51}{2}} =$$

$$= \sqrt{63} - \sqrt{12} = 3\sqrt{7} - 2\sqrt{3}.$$

Пример 3. Освободимся от иррациональности в знаменателе дроби

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{\sqrt{3}-1}}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{\sqrt{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{\sqrt{3}-1}}$ сначала на число $\sqrt{\sqrt{3}+1}$, а затем на $\sqrt{2}$. Получим:

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{\sqrt{3}-1}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3-1}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 4. Докажем, что при $1 \leqslant a \leqslant 2$ значение выражения

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$$

не зависит от a.

В каждом из двойных радикалов освободимся от внешнего радикала:

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}=\sqrt{(a-1)+2\sqrt{a-1}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2}=$$

$$=\left|\sqrt{a-1}+1\right|=\sqrt{a-1}+1;$$

$$\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}=\sqrt{(a-1)-2\sqrt{a-1}+1}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2}=\left|\sqrt{a-1}-1\right|.$$

Если $1 \leqslant a \leqslant 2$, то $\left|\sqrt{a-1}-1\right|=1-\sqrt{a-1}$.

Отсюда

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}=\sqrt{a-1}+1+1-\sqrt{a-1}=2.$$

Упражнения

567. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{15-11\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{6\sqrt{3}-13}$; г) $\sqrt{5\sqrt{3}-6\sqrt{2}}$?

568. Сторона правильного восьмиугольника, вписанного в круг с радиусом R, вычисляется по формуле $a_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, правильного двенадцатиугольника — по формуле $a_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$. В каждом случае найдите, каким должен быть радиус окружности, чтобы сторона многоугольника выражалась рациональным числом.

569. Выполните умножение:

а) $\sqrt{6+\sqrt{11}}\cdot\sqrt{6-\sqrt{11}}$;

б) $\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-2}$;

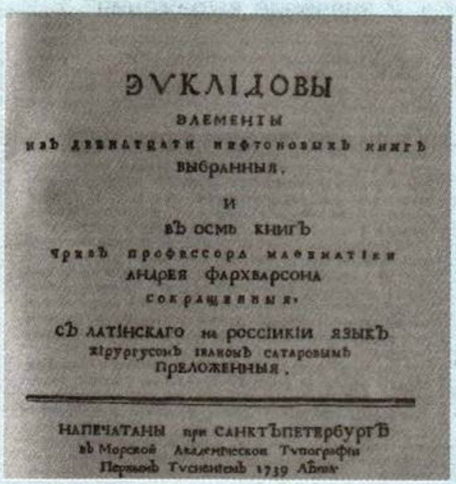
в) $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$;

г) $\sqrt{\sqrt{17}-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{17}+2\sqrt{2}}$.

570. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\sqrt{23}-\sqrt{19}}\cdot\sqrt{\sqrt{23}+\sqrt{19}}+\sqrt{5\sqrt{2}+7}\cdot\sqrt{5\sqrt{2}-7}$;

б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}$.


ЭѴКЛIДОВЫ
ЭЛЕМЕНТЫ
изъ двенатцати нефтоновыхъ книгъ
выбранныя,
и
въ осмь книгъ
чрезъ профессора математiки
Андрея Фархварсона
сокращенныя,
съ латiнскаго на россiискiи языкъ
хирургусомъ Иваномъ Сатаровымъ
преложенныя.

НАПЕЧАТАНЫ при САНКТЪПЕТЕРБУРГѢ
въ Морской Академической Типографiи
Первымъ Тисненiемъ 1739 Лѣта.

Титульный лист первого русского печатного издания «Начал» Евклида. Санкт-Петербург, 1739 г.

571. В знаменитом трактате «Начала» Евклид доказал геометрически следующую теорему: если в одну и ту же окружность вписаны правильные пятиугольник, шестиугольник и десятиугольник, то площадь квадрата, построенного на стороне пятиугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на сторонах шестиугольника и десятиугольника. Докажите эту теорему алгебраически, зная, что

$$a_5 = \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad a_6 = R, \quad a_{10} = \frac{1}{2}R\left(\sqrt{5}-1\right),$$

где R — радиус окружности, a_5, a_6, a_{10} — длины сторон правильных вписанных в окружность пятиугольника, шестиугольника и десятиугольника соответственно.

572. Докажите, что

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 1.$$

573. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$; в) $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2$;

б) $\left(\sqrt{6-3\sqrt{3}}-\sqrt{6+3\sqrt{3}}\right)^2$; г) $\left(\sqrt{\sqrt{17}-2\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{17}+2\sqrt{2}}\right)^2$.

574. Найдите a^2 и a, если:

а) $a = \sqrt{21+2\sqrt{38}}+\sqrt{21-2\sqrt{38}}$;

б) $a = \sqrt{22+2\sqrt{85}}-\sqrt{22-2\sqrt{85}}$.

575. Упростите выражение, представив подкоренное выражение в виде квадрата:

а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{13-4\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$.

576. Найдите значение x, если:

а) $x=\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$;

б) $x=\sqrt{12-2\sqrt{11}}-\sqrt{12+2\sqrt{11}}$.

577. Докажите, что значение выражения является целым числом:

а) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$; в) $\sqrt{81+8\sqrt{5}}-4\sqrt{5}$;

б) $\sqrt{3}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{16-8\sqrt{3}}+2\sqrt{3}$.

578. Выясните, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\sqrt{12+2\sqrt{11}}+\sqrt{12-2\sqrt{11}}$;

б) $\sqrt{14+2\sqrt{33}}-\sqrt{14-2\sqrt{33}}$;

в) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}+\sqrt{9-4\sqrt{2}}$;

г) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}$.

579. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{18}{\sqrt{\sqrt{11}-\sqrt{2}}}$; б) $\dfrac{6}{\sqrt{\sqrt{3}-1}}$; в) $\dfrac{9}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}$; г) $\dfrac{12}{\sqrt{2\sqrt{6}+\sqrt{15}}}$.

580. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}}$; б) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{12}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{12}-\sqrt{3}}}$; в) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$; г) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{5}}}$.

581. Упростите выражение:

а) $2a^2-5-\sqrt{4a^4+\sqrt{1+8a^2+16a^4}}$;

б) $9a-\sqrt{\sqrt{64a^4+16a^2+1}+a^2-6a}$, где $a>1$.

582. Освободитесь от внешнего радикала, представив подкоренное выражение в виде квадрата:

а) $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-1}}$, где $a > 1$;   б) $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}$, где $a > b$.

583. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $abc > 4$, то

$$\sqrt{\frac{abc+4}{a}-4\sqrt{\frac{bc}{a}}}=\frac{\sqrt{abc}-2}{\sqrt{a}}.$$

584. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\frac{3b+a^2}{2a}+\sqrt{3b}}+\sqrt{\frac{3b+a^2}{2a}-\sqrt{3b}}$, если $a > 0$, $b > 0$, $a > \sqrt{3b}$;

б) $\sqrt{\frac{a+\sqrt{4(a-1)}}{a-\sqrt{4(a-1)}}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{4(a-1)}}{a+\sqrt{4(a-1)}}}-\frac{4}{a-2}$, если $a > 2$.

Упражнения для повторения

585. Докажите, что при $a > -1$ выражение

$$\left(\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}\right):\frac{4a}{5a-5}$$

принимает положительные значения.

586. В одной системе координат постройте графики функций $y = x^2$ и $y = x + 6$, с их помощью найдите решение уравнения $x^2 - x - 6 = 0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте и докажите теоремы о квадратном корне из произведения и дроби.

2. Сформулируйте и докажите теорему о квадратном корне из степени. Найдите значение выражения $\sqrt{(-2)^6\cdot(-3)^8}$.

3. На примере выражений $\sqrt{50a}$ и $2\sqrt{a}$ объясните, как выполняется вынесение множителя за знак корня и внесение множителя под знак корня.

4. На примере выражений $\frac{a}{\sqrt{b}}$ и $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ объясните, как в выражениях такого вида можно освободиться от иррациональности в знаменателе дроби.

Дополнительные упражнения к главе 3

К параграфу 6

587. Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:

а) $\frac{9}{13}$; б) $\frac{11}{70}$; в) $\frac{468}{99}$; г) $\frac{1}{300}$.

588. Запишите три каких-либо рациональных числа, заключённых между числами $-\frac{1}{7}$ и 0,(7).

589. Найдите значение выражения:

а) 1,(3) + 3,(1); в) 1,(3) − 0,2(21);
б) 1,(3) + 3,2(5); г) 2,1(6) : 0,3.

590. Диагональ квадрата равна $2e$, где e — единичный отрезок. Докажите, что сторона этого квадрата не выражается через отрезок e рациональным числом.

591. Может ли разность рационального и иррационального чисел быть рациональным числом?

592. Докажите, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 3.

593. На координатной прямой изобразите числовой промежуток:

а) [3; 3,(3)]; б) [−3; 0,3); в) (−3,3; −3,03); г) (−3,0(3); +∞).

Запишите неравенство, задающее каждый числовой промежуток.

594. На координатной прямой изобразите числовой промежуток, заданный неравенством:

а) $-\frac{2}{7} < x \leqslant 2{,}7$; б) $x \leqslant 2{,}7$; в) $-\frac{2}{7} \leqslant x < 2{,}7$; г) $x > -\frac{2}{7}$.

Запишите обозначение и название каждого числового промежутка.

595. Среди учащихся 8 класса провели опрос: сколько времени (в среднем) занимает дорога от дома до школы. Были получены следующие результаты (в минутах):

16; 6; 14; 3; 7; 28; 12; 23; 35; 8; 17; 31; 40; 24; 7; 5; 13; 18; 11; 4; 6; 22; 30; 14; 15; 6; 27; 8.

Используя полученные данные, составьте интервальный ряд с интервалом:
а) 5 мин;
б) 10 мин.
Для каждого интервального ряда данных постройте столбчатую диаграмму.

596. Запишите каждое из чисел $\frac{3}{32}$, $\frac{125}{64}$, $3\frac{2}{3}$, $5\frac{9}{11}$ и $7\frac{5}{6}$ в виде десятичной или бесконечной десятичной дроби. Округлите результат до десятых и найдите абсолютную погрешность приближённого значения.

597. Запишите каждое из чисел $4\frac{3}{4}$; $1\frac{5}{8}$; $2\frac{4}{25}$ и $\frac{92}{125}$ в виде десятичной дроби, округлите результат до десятых, найдите относительную погрешность и выразите её в процентах.

598. Какое из приближённых значений 3,14; 3,15; $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$ числа $\pi = 3{,}14159...$ является более точным?

599. Округлите слагаемые в сумме $2{,}8475 + 5{,}139$ до десятых, сложите приближённые значения и найдите абсолютные погрешности приближённых значений слагаемых и суммы.

600. Докажите, что лучшим из трёх приближённых значений a, b и $\frac{a+b}{2}$ числа α является среднее арифметическое a и b, если $a \leqslant \alpha \leqslant b$.

601. Масса таблетки приближённо равна 25 мг (с точностью до 1 мг), а масса человека приближённо равна 85 кг (с точностью до 0,5 кг). Сравните качества измерений.

602. Прибор даёт возможность измерить величину с относительной точностью до 0,1 %. При измерении в результате получили 625. Оцените абсолютную погрешность.

К параграфу 7

603. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{2{,}56}$; б) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$; в) $\left(\sqrt{2}\right)^2$; г) $\left(-2\sqrt{3}\right)^2$.

604. Запишите все целые числа, принадлежащие интервалу:

а) $\left(-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{3}\right)$; в) $\left(5-\sqrt{35};\ 5+\sqrt{35}\right)$;

б) $\left(2-\sqrt{2};\ \sqrt{111}\right)$; г) $\left(-1;\ \sqrt{3+\sqrt{2}}\right)$.

605. Расположите в порядке возрастания числа

$$12;\ \sqrt{145};\ 11{,}8;\ 12{,}1;\ \sqrt{140};\ \sqrt{131}.$$

606. Площадь S треугольника со сторонами a, b, c можно найти по формуле Герона Александрийского (I в.)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника. Найдите площадь треугольника, если:

а) $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$;
б) $a = 5$, $b = 9$, $c = 12$;
в) $a = 5$, $b = 9$, $c = \sqrt{34}$;
г) $a = \sqrt{29}$, $b = \sqrt{65}$, $c = \sqrt{106}$.

607. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3x-2}+1=4$;
б) $5+\sqrt{3-0{,}4x}=1$;
в) $3\sqrt{0{,}7x}+6=7$;
г) $9-4\sqrt{-x}=1$;
д) $3+2\sqrt{2+0{,}6x}=9$;
е) $6-3\sqrt{x-1}=7$.

608. Пересекает ли график функции $y=\sqrt{x}$ прямую:
а) $y = 0{,}5x$; б) $y = 0{,}5x + 1$?
При положительном ответе укажите координаты точек пересечения.

К параграфу 8

609. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{16{,}9 \cdot 14{,}4 \cdot 0{,}36}$;
б) $\sqrt{8{,}1 \cdot 0{,}64 \cdot 12{,}1}$;
в) $\sqrt{2{,}5 \cdot 2{,}4 + 2{,}5^2}$;
г) $\sqrt{19{,}6 \cdot 4{,}6 - 19{,}6}$.

610. Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt{\frac{12{,}5^2-10^2}{64}}$; б) $\sqrt{\frac{81}{5^2-1{,}4^2}}$; в) $\sqrt{\frac{65^2-25^2}{1{,}96}}$; г) $\sqrt{\frac{1{,}44}{11{,}7^2-10{,}8^2}}$.

611. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(x-9)^2}$ при $x \geqslant 9$;
б) $\sqrt{(7-a)^2}$ при $a \leqslant 7$;
в) $\sqrt{x^2-12x+36}$ при $x \geqslant 6$;
г) $\sqrt{4a^2-4a+1}$ при $a > 1$.

612. Упростите выражение:

а) $\sqrt{b^2-b+0{,}25}-\sqrt{b^2-1{,}2b+0{,}36}$, если $0{,}5 \leqslant b \leqslant 0{,}6$;

б) $\sqrt{4p^2+4p+1}-\sqrt{9p^2+1-6p}$, если $p \geqslant \frac{1}{3}$.

613. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{a^7b^6}$, если $a > 0$, $b < 0$;

б) $\sqrt{0{,}02x^5y^5}$, если $x > 0$, $y > 0$;

в) $\sqrt{a^{12}b^5}$, если $a > 0$, $b > 0$;

г) $\sqrt{75x^3y^5}$, если $x < 0$, $y < 0$.

614. Упростите выражение:

а) $2\left(3\sqrt{a} - \frac{\sqrt{a^3}}{a}\right) - 3\left(\sqrt{a} + \frac{\sqrt{a^5}}{a^2}\right)$;

б) $3\left(\sqrt{ab} - \frac{2\sqrt{a^5b}}{a^2}\right) + \left(\frac{6\sqrt{ab^5}}{b^2} - \frac{\sqrt{a^3b}}{a}\right)$.

615. Сравните значения выражений:

а) $a\sqrt{a}$ и $\sqrt{a^5}$ при $a > 1$;

б) $b^2\sqrt{b^5}$ и $\sqrt{b^{11}}$ при $b > 1$.

616. Упростите выражение:

а) $(3\sqrt{2} - 1)(1 + 3\sqrt{2}) - (3\sqrt{2} - \sqrt{1{,}5})^2 - 6\sqrt{3}$;

б) $(8 + 2\sqrt{15})(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$;

в) $(4\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(6\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) - (1 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)$;

г) $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{3}$.

617. Найдите значение выражения:

а) $a^4 - a^2 + 6$ при $a = 1 - \sqrt{3}$;

б) $a^4 - 6a^2$ при $a = 1 + \sqrt{2}$.

618. Докажите, что каждое из чисел $2 + \sqrt{3}$ и $2 - \sqrt{3}$ является корнем уравнения $x^2 - 4x + 1 = 0$.

619. Из данных чисел выберите пары противоположных чисел:

$$1 - 3\sqrt{2};\quad -0{,}2\sqrt{3} + 0{,}1\sqrt{2};\quad \sqrt{8} - 3;\quad \frac{1}{\sqrt{12} + \sqrt{2}};\quad \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}};\quad \sqrt{18} - 1.$$

620. Из данных чисел выберите пары взаимно обратных чисел:

$$3 - 2\sqrt{2};\quad \sqrt{6} - 1;\quad \sqrt{12} - \sqrt{2};\quad 0{,}1\sqrt{2} + 0{,}2\sqrt{3};\quad 3 + 2\sqrt{2};\quad 0{,}2\sqrt{6} + 0{,}2.$$

621. Выясните, при каких значениях a дробь принимает наибольшее значение, и найдите это значение:

а) $\frac{1 - \sqrt{a - 2}}{3 - a}$;

б) $\frac{\sqrt{a + 4} - 2}{a}$.

622. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; в) $\frac{1}{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-1}$; г) $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{14}-\sqrt{21}}$.

623. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{b}+\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}+1\right):\left(1+\frac{\sqrt{ab}}{ab}\right)$; б) $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{ab}}+1\right):\left(1-\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt{b}}\right)$.

624. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения не зависит от значений переменных:

а) $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{\sqrt{16ab}}{a-b}$; б) $\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}+2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}+\sqrt{y}-\sqrt{x}$.

625. Сократите дробь:

а) $\frac{x^4+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$; б) $\frac{2\sqrt{1-x^2}+x^2-2}{1-\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x+1}}$.

626. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}}$; в) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;

б) $\sqrt{7-\sqrt{13}}-\sqrt{7+\sqrt{13}}$; г) $\sqrt{7-\sqrt{33}}-\sqrt{7+\sqrt{33}}$.

627. Упростите выражение.

а) $\left(\sqrt{\sqrt{40}+6}+\sqrt{\sqrt{40}-6}\right)^2$.

Замечание. Это выражение впервые встречается в трудах Луки Пачоли (1445—1514), итальянского математика.

б) $\left(\sqrt{12+\sqrt{6}}+\sqrt{12+\sqrt{6}}\right)^2$.

Замечание. Это выражение использовал в своих работах Михаэль Штифель (1486—1567), немецкий математик.

в) $\left(\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}\right)^2$.

Замечание. Это выражение встречается в трудах Симона Стевина (1548—1620), голландского инженера.

628. Докажите, что $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$.

Замечание. Это тождество доказал Жозеф Бертран (1822—1900), французский математик.

629. Докажите, что $\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^2=8.$

630. Упростите выражение:

а) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}$; в) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}+\sqrt{9+2\sqrt{14}}$;

б) $\sqrt{3}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{23+8\sqrt{7}}-\sqrt{23-8\sqrt{7}}$.

631. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\frac{a+1}{2}-\sqrt{a}}-\sqrt{\frac{a+1}{2}+\sqrt{a}}$; б) $\sqrt{\frac{a+4}{4}+\sqrt{a}}-\sqrt{\frac{a+4}{4}-\sqrt{a}}$.

632. Упростите выражение: $\frac{x+y-1}{x-y+1}$, если $x=\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1}$, $y=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}+1)}{\sqrt{ab}-1}$.

633. Докажите, что $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Замечание. Тождество индийского математика и астронома Бхаскара, (1114 — позднее 1178 г.).

634. Упростите выражение:

а) $\sqrt{2a^2+\sqrt{a^8+2a^4+1}}$;

б) $\sqrt{4a^2+1+\sqrt{a^8+6a^4+9}}$;

в) $\sqrt{2a+2+2\sqrt{a^2+2a}}-\sqrt{a}$, где $a>0$;

г) $\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-4}}+\sqrt{a-2}$, где $a>2$;

д) $\sqrt{a+3-4\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+8-6\sqrt{a-1}}$, где $a>10$.

635. Упростите выражение $\sqrt{x+2\sqrt{x-2}-1}+\sqrt{x-2\sqrt{x-2}-1}$, если:

а) $2 \leqslant x \leqslant 3$;
б) $x > 3$.

636. Докажите, что при положительных значениях a, b и c выражение

$$\sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}}+\sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}$$

тождественно равно:

а) $2\sqrt{a+b}$, если $a+b \geqslant c$;

б) $2\sqrt{c}$, если $a+b<c$.

Глава 4 Квадратные уравнения

В этой главе рассматривается традиционный для курса школьной алгебры материал — формулы корней квадратного уравнения и теорема Виета. После изучения этих вопросов становится возможным рассмотрение выражений, симметрических относительно корней квадратного уравнения, дробно-рациональных уравнений и задач, решаемых с помощью квадратных или дробно-рациональных уравнений. В этой же главе будет выведена формула для разложения квадратного трёхчлена на множители.

§ 9. Квадратное уравнение и его корни

28. Определение квадратного уравнения. Неполные квадратные уравнения

Левая часть уравнения $3x^2 - 5x - 2 = 0$ есть квадратный трёхчлен, а правая — число нуль. Такие уравнения называют *квадратными уравнениями*.

> **Определение. Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$.**

Уравнения $2x^2 + 5x + 1 = 0$; $x^2 - x + 9 = 0$; $3x^2 - 7x = 0$; $\frac{1}{4}x^2 + 1 = 0$; $-0{,}5x^2 = 0$ являются квадратными уравнениями, так как каждое из них имеет вид $ax^2 + bx + c = 0$ причём $a \neq 0$. В первом из этих уравнений $a = 2$, $b = 5$ и $c = 1$; во втором $a = 1$, $b = -1$ и $c = 9$; в третьем $a = 3$, $b = -7$ и $c = 0$; в четвёртом $a = \frac{1}{4}$, $b = 0$ и $c = 1$; в пятом $a = -0{,}5$, $b = c = 0$.

Числа a, b и c называют коэффициентами квадратного уравнения. Число a называют старшим коэффициентом, число b — вторым коэффициентом, число c — свободным членом.

Заметим, что квадратное уравнение относится к уравнениям второй степени, так как его левая часть представляет многочлен второй степени.

Наиболее простыми для решения являются квадратные уравнения, в которых b или c равно нулю. Такие уравнения называют *неполными квадратными уравнениями*. К их числу относятся, например, уравнения: $5x^2 + 3x = 0$; $-4x^2 + 12 = 0$; $2x^2 = 0$. В первом из них $c = 0$ и $b \neq 0$, во втором $b = 0$ и $c \neq 0$, в третьем $b = 0$ и $c = 0$. Эти уравнения представляют различные виды неполных квадратных уравнений, отличающиеся способом решения. Рассмотрим по порядку решение всех этих видов уравнений.

Пример 1. Решим уравнение $5x^2 + 3x = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители, получим:

$$x(5x + 3) = 0.$$

Отсюда

$$x = 0 \quad \text{или} \quad 5x + 3 = 0.$$

Значит, уравнение $5x^2 + 3x = 0$ имеет два корня: 0 и $-\frac{3}{5}$.

Ответ: 0; $-\frac{3}{5}$.

Уравнение $5x^2 + 3x = 0$ является неполным квадратным уравнением вида $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$. Чтобы решить такое уравнение, достаточно его левую часть разложить на множители. Получится уравнение

$$x(ax + b) = 0.$$

Произведение $x(ax + b)$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = 0$ или $ax + b = 0$.

Уравнение $x = 0$ имеет корень 0. Решая уравнение $ax + b = 0$, получим ещё один корень $-\frac{b}{a}$, так как $a \neq 0$ по определению квадратного уравнения.

Значит, неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$, имеет два корня: 0 и $-\frac{b}{a}$.

Пример 2. Решим уравнение $-4x^2 + 12 = 0$.

Перенесём свободный член уравнения в правую часть:

$$-4x^2 = -12.$$

Разделим обе части получившегося уравнения на -4:

$$x^2 = 3.$$

Существуют лишь два числа, квадраты которых равны числу 3. Это числа $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$. Значит, уравнение $-4x^2 + 12 = 0$ имеет два корня: $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$.

Уравнение $-4x^2 + 12 = 0$ является неполным квадратным уравнением вида $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$. Не всякое уравнение такого вида имеет корни. Например, уравнение $5x^2 + 4 = 0$ не имеет корней.

Рассмотрим в общем виде решение неполного квадратного уравнения $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$.

Перенесём его свободный член в правую часть и обе части получившегося уравнения разделим на a, так как $a \neq 0$. Получим:

$$ax^2 = -c; \quad x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Так как $c \neq 0$, то $-\frac{c}{a}$ может быть или положительным, или отрицательным числом.

Если $-\frac{c}{a} > 0$, то уравнение $x^2 = -\frac{c}{a}$, следовательно, и равносильное ему уравнение $ax^2 + c = 0$ имеет два корня: $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Если $-\frac{c}{a} < 0$, то уравнение $ax^2 + c = 0$ не имеет корней, так как не существует значения x, квадрат которого равен отрицательному числу $-\frac{c}{a}$.

Пример 3. Решим уравнение $-1{,}5x^2 = 0$.

Разделим обе части уравнения на $-1{,}5$, получим уравнение $x^2 = 0$. Его корнем является лишь число 0.

Ответ: 0.

Уравнение $-1{,}5x^2 = 0$ является неполным квадратным уравнением вида $ax^2 = 0$. При любом отличном от нуля значении a оно имеет единственный корень — число 0.

Упражнения

637. Является ли квадратным уравнение:

а) $-3{,}5x^2 + 6x + 9 = 0$;
б) $4x^3 - 5x - 2 = 0$;
в) $-x^2 + 6x = 0$;
г) $-25x + 1 = 0$;
д) $9x^2 - 5 = 0$;
е) $8x^2 = 0$?

638. Преобразуйте уравнение в квадратное и назовите его коэффициенты:

а) $3x(x - 2) + (x - 1)(x + 1) = -2$;
б) $(2x - 1)^2 - (3x + 2)(3x - 2) = 0$;
в) $(x - 4)(x + 4) + (2x + 1)^2 = 4x$;
г) $(5x - 1)^2 - (5x + 1)^2 = (4x + 1)^2 + (4x - 1)^2$.

639. При каком значении m уравнение:

а) $3x^2 + (m - 1)x + m - 4 = 0$;
б) $2x^2 - (9 - m)x + (m - 9) = 0$;
в) $(m - 1)x^2 + (m^2 - 1)x + 7 = 0$;
г) $(m^2 + \sqrt{3})x^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ —

обращается в неполное квадратное уравнение? Напишите это уравнение.

640. Решите уравнение:

а) $5x^2 - 3x = 0$; в) $-3u^2 + 2{,}1u = 0$; д) $7m^2 + m = 0$;
б) $2x^2 - 1{,}2x = 0$; г) $2{,}5v^2 = 7{,}5v$; е) $2m = 3m^2$.

641. Найдите корни уравнения:

а) $3x^2 - 27 = 0$; в) $5a^2 = 10$; д) $9m^2 - 4 = 0$;
б) $-2x^2 + 50 = 0$; г) $-0{,}2y^2 + 1 = 0$; е) $\frac{1}{5} = \frac{1}{4}n^2$.

642. Решите уравнение:

а) $-4x^2 + 3x = 0$; в) $9m^2 = -m$; д) $-1{,}7p^2 = 0$;
б) $25x^2 - 7 = 0$; г) $-m^2 + 8 = 0$; е) $3{,}2k^2 = 0$.

643. Найдите корни уравнения:

а) $100x^2 - 9x = 0$; в) $2 = 7x^2$; д) $-0{,}8y^2 + 3y = 0$;
б) $9x^2 - 100 = 0$; г) $2{,}4p^2 + 7{,}2p = 0$; е) $0{,}2(n - 2)^2 - 5{,}4 = 0$.

644. Является ли квадратным уравнение $x^2 + 2|x| = 0$? Найдите его корни.

645. Решите относительно x уравнение:

а) $x^2 - a^2 + 2a - 1 = 0$; б) $-\frac{1}{4}x^2 + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$.

646. Найдите корни уравнения:

а) $4x(x + 3) = 12x + 1$;
б) $3m = m\left(m + 2\frac{1}{3}\right)$;
в) $a(6a + 1) = 2a\left(2 - 2\frac{1}{2}a\right)$;
г) $3(1 - 5k^2) = 2(1 - 6k^2)$;
д) $(2p - 3)(2p + 3) = 7$;
е) $(3y + 2)^2 = 4(y + 1)$;
ж) $(7x - 2)(x + 2) = (3x - 1)(3x + 5)$;
з) $\left(\frac{1}{2}m + 4\right)(2m - 4) = 3m(m + 2) - 16$.

647. Решите уравнение:

а) $6m^2 - (2m - 1)^2 = m(m + 4)$;
б) $(3a + 1)^2 - 10 = (a + 3)(a - 3)$;
в) $(4x - 3)^2 - (3x - 4)^2 = 7$;
г) $10m + (2 - m)^2 = 63 - (3 - m)^2$;
д) $(2p + 3)^2 + (2p - 3)^2 + (p - 6)(p + 6) = p^2$;
е) $(x + 4)(x + 3) + (x - 2)(x + 2) = 2(3x + 4)$.

648. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2-16}=3$; в) $\sqrt{2x^2+1}=\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{3x^2+1}=\sqrt{13}$; г) $\sqrt{25-12x^2}=1$.

649. Решите уравнение, введя новую переменную:

а) $2x - \sqrt{x} = 0$; в) $\sqrt{x} + 3x = 0$;

б) $2x - 2 - 3\sqrt{x-1}=0$; г) $2\sqrt{2x-3}+6x-9=0$.

650. Выразите переменную x из уравнения:

а) $4x^2 - 2xy = 0$; в) $2x^2 - 3y^2 = 0$;

б) $2x^2 - 4xy^2 = 0$; г) $y + y^2 + x^2 = 0$.

651. Решите относительно r уравнение:

а) $\pi r^2 = S$; б) $\pi r^2 h = V$.

652. Одно из натуральных чисел меньше другого на 3, а их произведение больше утроенного первого числа на 25. Найдите эти числа.

653. Один катет прямоугольного треугольника в 3 раза больше другого. Площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна площади прямоугольника, длина которого 40 см, а ширина равна меньшему катету. Найдите длины катетов.

654. Если радиус круга увеличить в 2 раза, затем уменьшить на 1 см, то его площадь увеличится на π см^2. Найдите радиус круга.

Упражнения для повторения

655. Выделите квадрат суммы или квадрат разности из квадратного трёхчлена:

а) $m^2 - 3m + 2{,}5$; в) $x^2 - 4x + c$;

б) $p^2 + 5p - 8$; г) $x^2 + 6x - c$.

656. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{x+6\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}+3}$ при $x = 0{,}25$ и при $x = 0{,}36$;

б) $\dfrac{y-3\sqrt{y}+2{,}25}{\sqrt{y}-1{,}5}$ при $y = 1{,}44$ и при $y = 4{,}41$.

657. Верно ли, что является рациональным числом значение выражения:

а) $\left(\sqrt{8-3\sqrt{2}}-\sqrt{8+3\sqrt{2}}\right)^2$; б) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{3}}+\sqrt{5-2\sqrt{3}}\right)^2$?

29. Формулы корней квадратного уравнения

Решим квадратное уравнение $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

Разделив обе части уравнения на 3, получим равносильное ему квадратное уравнение $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$.

Выделим из квадратного трёхчлена $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ в левой части получившегося уравнения квадрат разности:

$$x^2 - 2x \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = 0.$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} = 0.$$

Решим получившееся уравнение относительно $x - \frac{1}{3}$:

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$x - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \text{ или } x - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда

$$x = -\frac{1}{3} \text{ или } x = 1.$$

Значит, корнями уравнения являются числа $-\frac{1}{3}$ и 1.

Таким же способом решим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Разделим правую и левую части уравнения (1) на a, получим равносильное ему уравнение

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Выделим из квадратного трехчлёна $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ квадрат суммы:

$$x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0,$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0.$$

Отсюда

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \qquad (2)$$

Числитель дроби $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, т. е. выражение $b^2 - 4ac$, называют дискриминантом квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (от латинского слова *discrīmināre*, что означает различать). Его обозначают буквой D. Значит,

$$D = b^2 - 4ac.$$

Используя обозначение дискриминанта, уравнение (2) можно записать в виде

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}. \qquad (3)$$

Знаменатель дроби $\frac{D}{4a^2}$ положителен, так как по определению квадратного уравнения $a \neq 0$. Поэтому лишь от D зависит, какие значения (положительные, нуль или отрицательные) принимает эта дробь. Рассмотрим отдельно каждый случай.

1) Если $D > 0$, то $\frac{D}{4a^2} > 0$. В этом случае при решении неполного квадратного уравнения (3) относительно $x + \frac{b}{2a}$ получаем:

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{D}{4a^2}} \quad \text{или} \quad x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{D}{4a^2}}.$$

Отсюда

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{или} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{или} \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{или} \quad x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Следовательно, уравнение (1) в этом случае имеет два корня: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$.

Применяется краткая запись: $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Равенство

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{где} \quad D = b^2 - 4ac,}$$

называют основной формулой корней квадратного уравнения.

2) Если $D = 0$, то $\frac{D}{4a^2} = 0$. В этом случае при решении неполного квадратного уравнения (3) относительно $x + \frac{b}{2a}$ получаем:

$$x + \frac{b}{2a} = 0.$$

Отсюда

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Следовательно, уравнение (1) в этом случае имеет один корень $-\frac{b}{2a}$. Этот корень можно получить по основной формуле корней квадратного уравнения. При $D = 0$ она даёт:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}, \quad x = -\frac{b}{2a}.$$

3) Если $D < 0$, то $\frac{D}{4a^2} < 0$. В этом случае как уравнение (3), так и уравнение (1) не имеет корней.

! По дискриминанту квадратного уравнения определяют, сколько оно имеет корней:
если $D > 0$, то уравнение имеет два корня;
если $D = 0$, то уравнение имеет один корень;
если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

A Итак, чтобы решить квадратное уравнение, надо:
1) вычислить дискриминант и сравнить его с нулём;
2) если дискриминант больше нуля или равен нулю, то произвести вычисления по формуле и написать ответ;
3) если дискриминант меньше нуля, то написать, что уравнение не имеет корней.

Пример 1. Решим уравнение $6x^2 - x - 2 = 0$.
Коэффициенты уравнения $a = 6$, $b = -1$, $c = -2$. Вычислим дискриминант:

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 1 + 48 = 49,\ D > 0.$$

Применим формулу корней квадратного уравнения:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 6}, \quad x = \frac{1 \pm 7}{12},$$

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$.

Пример 2. Решим уравнение $4x^2 - 12x + 9 = 0$.
Вычислим дискриминант:

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0,\ D = 0.$$

Применим формулу корней квадратного уравнения:

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4}, \quad x = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $1\frac{1}{2}$.

Пример 3. Решим уравнение $3x^2 + 6x + 5 = 0$.
Вычислим дискриминант: $D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 36 - 60$, $D < 0$.
Ответ: корней нет.

Из основной формулы корней квадратного уравнения $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ можно получить дополнительную формулу, по которой проще вычислять корни квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом.

Разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ на 2, получим:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D}}{a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}D}}{a}.$$

Итак, корни квадратного уравнения, в котором второй коэффициент — чётное число, проще вычислять по формуле $x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}D}}{a}$, где $\frac{1}{4}D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$.

Если в квадратном уравнении второй чётный коэффициент обозначить $2k$, то уравнение примет вид $ax^2 + 2kx + c = 0$. Тогда для решения этого уравнения удобнее использовать формулу для вычисления дискриминанта: $D_1 = k^2 - ac$, где $D_1 = \frac{1}{4}D$. В этом случае формула корней квадратного уравнения будет выглядеть так:

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}.$$

Эту формулу называют *формулой корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом*.

Пример 4. Решим уравнение $3x^2 - 16x + 5 = 0$.
Второй коэффициент -16 — чётное число. Применим формулу корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом:

$$\frac{1}{4}D = (-8)^2 - 3 \cdot 5 = 49, \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{49}}{3}, \quad x = \frac{8 \pm 7}{3}, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: 5; $\frac{1}{3}$.

Упражнения

658. Сколько корней имеет уравнение:

а) $4x^2 + x - 8 = 0$;
б) $9x^2 - 6x + 1 = 0$;
в) $2x^2 + 5x + 6 = 0$;
г) $x^2 + 6x + 7 = 0$;
д) $-9x^2 + 10x - 3 = 0$;
е) $16x^2 - 40x + 25 = 0$?

659. Решите уравнение:

а) $2x^2 - 5x - 3 = 0$;
б) $3x^2 + 13x + 4 = 0$;
в) $6y^2 - y - 1 = 0$;
г) $9x^2 - 30x + 25 = 0$;
д) $y^2 + 4y + 4 = 0$;
е) $3m^2 - 4m + 3 = 0$;
ж) $4y^2 = 2 - 7y$;
з) $p^2 = p + 90$.

660. Найдите корни уравнения:

а) $5x^2 + 5x + 1 = 0$;
б) $x^2 = 2x + 2$;
в) $-3z^2 + z + 1 = 0$;
г) $6 + 7x = 3x^2$;
д) $-2m^2 + 11m - 10 = 0$;
е) $y^2 - 2y - 7 = 0$;
ж) $3x^2 + 11x + 6 = 0$;
з) $15 + 17a = 4a^2$.

661. Решите уравнение:

а) $6x^2 - 13x + 2 = 0$;
б) $4y^2 + 36y = -81$;
в) $9m^2 - 7m + 10 = 0$;
г) $x^2 + 4x - 1 = 0$;
д) $8p^2 - p - 3 = 0$;
е) $20y = 3y^2 + 20$.

662. Найдите значения x, при которых равно нулю значение трёхчлена:

а) $100x^2 - 80x - 33$;
б) $6x^2 - 25x + 4$.

663. Решите уравнение:

а) $3m^2 + 2m = 8$;
б) $x^2 + 12x = -35$;
в) $5y^2 - 8y + 2 = -1$;
г) $4m^2 - 2m - 3 = 2$;
д) $5x^2 - 3x = 5x + 4$;
е) $17z^2 - 20z = 8z^2 - 3$;
ж) $35x + 7 = 1 - 50x^2$;
з) $40y^2 - 4 = 35y - 10y^2$.

664. Найдите корни уравнения:

а) $49x^2 - 28x - 3 = -7$;
б) $12x^2 + 11x - 2 = 3$;
в) $6y^2 + 19y = 2y - 12$;
г) $11m^2 + 12 = 25m - m^2$;
д) $25y^2 - 12 = 10 + 5y$;
е) $50x^2 + 11x = -28 - 50x^2$.

665. При каких значениях переменной значение выражения:

а) $-7x^2 - 38x - 14$ равно -1;
б) $16x^2 + 10x - 21$ равно 5;
в) $4x^2 - 21x + 20$ равно -7;
г) $9x^2 + 9x + 4$ равно 2?

666. Найдите значения переменной, при которых равны значения многочленов:

а) $5x^2 + 17x - 2$ и $3x - 11$;

б) $7x^2 - 11x - 2$ и $-4x^2 + 2x - 5$;

в) $3x^2 - 2$ и $-3x^2 + 6x - 1$;

г) $4x + 4$ и $-10x^2 + 17x$.

667. Решите уравнение:

а) $x(5x - 3) = 3\left(2x - 1\frac{1}{3}\right)$;

б) $(2x + 1)(x - 3) = x(4 - x) - 9$;

в) $(3x - 2)(3x + 2) = 4x(x - 1)$;

г) $(1 - 2x)(2x + 1) = -2x(3x + 1) + 2$;

д) $(2m + 3)^2 = (m - 1)(m + 1)$;

е) $5a(a + 1) = (3a - 2)^2$;

ж) $(2p + 3)^2 - (p - 1)^2 = -8$;

з) $3(2x - 1)^2 = 7x^2 + 12$.

668. Найдите корни уравнения:

а) $(2x - 1)(x + 5) - (x + 1)(x + 2) = 0$;

б) $(3x + 1)(3x - 1) = 8x - 2$;

в) $(2x + 1)^2 = (1 + 3x)(3x - 1)$;

г) $(3 - m)^2 = 4m(m - 3) - 15$.

669. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3x}{2} - \frac{4x^2}{3}$;

б) $\frac{m^2}{5} - \frac{m}{10} = \frac{2m^2}{5} + \frac{3m}{10} - \frac{3}{5}$;

в) $\frac{5y^2}{8} - y = \frac{3y}{4} - y^2 - \frac{1}{8}$;

г) $\frac{5n^2}{6} - \frac{4n}{9} = n + 21\frac{1}{3}$;

д) $\frac{3x^2 - 2}{2} - 8x = 21$;

е) $m(4m + 1) = \frac{5m^2 + 1}{3}$;

ж) $\frac{7k - 5}{4} = \frac{4k^2 - 3}{2}$;

з) $\frac{6y + 1}{6} - \frac{4y^2 - 3}{4} = \frac{7}{6}$.

670. При каких значениях переменной верно равенство:

а) $0{,}5(m + 1{,}5) = \left(\frac{1}{2}m + 1\right)^2$;

б) $(0{,}6x - 0{,}2)(0{,}6x + 0{,}2) = 0{,}24x - 0{,}08$?

671. Решите уравнение:

а) $\frac{5}{6}x - \frac{4}{9}x^2 = \frac{1}{3}x - 5\frac{1}{2}$;

б) $\frac{1}{30}x^2 - \frac{1}{15}x = \frac{3}{10}x + 19$;

в) $(0{,}3m + 2)^2 - 2m = 0{,}8m - 3$;

г) $\frac{5x}{4} - \frac{3x^2}{8} = \frac{x}{2} - 9$;

д) $\frac{3m^2 - 4}{8} - \frac{2m + 3}{12} = \frac{m}{3} - \frac{1}{4}$;

е) $\frac{4y^2 + 3}{15} - \frac{2y}{5} = \frac{5 - 2y}{10} - \frac{1}{3}$.

672. При каких значениях q уравнение $x^2 - 2\sqrt{2}x + q + 1 = 0$ имеет различные корни?

673. Докажите, что уравнение $x^2 + (2m + 1)x + 2n + 1 = 0$ не имеет рациональных корней, если $m \in \boldsymbol{Z}$ и $n \in \boldsymbol{Z}$.

674. При каких натуральных значениях x значение дроби $\frac{5x^2 - 8}{4}$ равно значению квадратного трёхчлена $2x^2 - 5x + 5$?

675. Найдите приближённые значения корней уравнения с точностью до 0,01:

а) $3x^2 + 2x - 2 = 0$; б) $\frac{3m^2 - 7m}{3} = 2\left(m + 2\frac{1}{6}\right)$.

676. При каких значениях переменной:

а) значение дроби $\frac{2x^2 + 3x}{6}$ больше соответствующего значения дроби $\frac{5x - 1}{8}$ на $3\frac{1}{2}$;

б) значение дроби $\frac{5x^2 - 4}{10}$ в $4\frac{2}{3}$ раза меньше соответствующего значения дроби $\frac{4x + 3}{15}$?

677. Выразите переменную x из уравнения:

а) $x^2 - 5bx + 6b^2 = 0$; в) $x^2 - bx - 6b^2 = 0$;

б) $2x^2 + 5bx + 3b^2 = 0$; г) $3x^2 + bx - 2b^2 = 0$.

678. Решите относительно x уравнение

$$(x - 1)(x - 3) = (a - 1)(a - 3).$$

679. Докажите, что если уравнение $x^2 + px + q = 0$, где $p \in \boldsymbol{Z}$ и $q \in \boldsymbol{Z}$, имеет целые корни, то они являются делителями свободного члена.

680. Найдите все пары чисел m и n, для которых уравнение $(mx^2 - 6x + 3)(2x - n) = 0$ имеет ровно один корень, и для каждой такой пары укажите этот корень.

681. Докажите, что если квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$ имеют общий корень, то он равен 1.

682. Найдите условие, при котором уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни, являющиеся:

а) противоположными числами; б) обратными числами.

Упражнения для повторения

683. Упростите выражение:

а) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$; в) $(a\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-2a^2$;

б) $(5\sqrt{5}+1)^2-10\sqrt{5}$; г) $(3\sqrt{6}+2\sqrt{3})(3\sqrt{6}-2\sqrt{3})$.

684. Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{m}{n}-2+\frac{n}{m}\right):\left(\frac{n}{m^2+mn}-\frac{2}{m+n}+\frac{m}{n^2+mn}\right)$ при $m=\frac{3}{10}$ и $n=-\frac{4}{15}$;

б) $\left(1-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right)(a^2-1)$ при $a=1\frac{1}{2}$.

685. Докажите, что если к трёхзначному числу справа приписать такое же число, то получится шестизначное число, кратное 7, 11 и 13.

30. Уравнения, сводящиеся к квадратным

Некоторые уравнения удаётся решить, используя метод введения новой переменной. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим уравнение $16x^4-65x^2+4=0$.

В это уравнение переменная x входит только во второй и в четвёртой степени. Так как $x^4=(x^2)^2$, то уравнение можно свести к квадратному, обозначив x^2 буквой y. Получим

$$16y^2-65y+4=0.$$

Решив это уравнение, найдём, что $y_1=\frac{1}{16}$ и $y_2=4$. Возвращаясь к переменной x, получим уравнения $x^2=\frac{1}{16}$ и $x^2=4$, корнями которых являются числа $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$; 2 и -2.

Ответ: $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}$; 2; -2.

Уравнение $16x^4-65x^2+4=0$ имеет вид $ax^4+bx^2+c=0$, где $a\neq 0$. Уравнения такого вида называют *биквадратными*. Дополнение «би» (от латинского слова *bis* — дважды) связано с тем, что такое уравнение является квадратным относительно квадрата переменной x. Биквадратное уравнение можно решить, используя подстановку $y=x^2$. Подсказкой для такой подстановки является само уравнение.

В некоторых других случаях уравнения также удаётся решить с помощью введения новой переменной, но найти подстановку бывает сложнее.

Пример 2. Решим уравнение

$$x(x + 0{,}5)(x + 1{,}5)(x + 2) = 31{,}5.$$

Если записать его в стандартном виде, то получится уравнение

$$x^4 + 4x^3 + 4{,}75x^2 + 1{,}5x - 31{,}5 = 0,$$

для которого трудно найти какой-либо способ решения.

Поступим иначе. Заменим многочленом произведение первого и четвёртого множителей, а также второго и третьего. Получим:

$$(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 0{,}75) = 31{,}5.$$

В левой части дважды встречается выражение $x^2 + 2x$, причём переменная x ни в какое другое выражение не входит. Введём новую переменную $y = x^2 + 2x$. Тогда уравнение сводится к уравнению с переменной y:

$$y(y + 0{,}75) = 31{,}5.$$

Упростив его, получим:

$$y^2 + 0{,}75y - 31{,}5 = 0,$$
$$4y^2 + 3y - 126 = 0.$$

Решив это уравнение, найдём:

$$y_1 = -6, \quad y_2 = 5{,}25.$$

Подставим найденные значения y в равенство $y = x^2 + 2x$:

$$x^2 + 2x = -6 \quad \text{или} \quad x^2 + 2x = 5{,}25.$$

Уравнение $x^2 + 2x = -6$ не имеет корней, а уравнение $x^2 + 2x = 5{,}25$ имеет два корня: $x_1 = -3{,}5$ и $x_2 = 1{,}5$.

Итак, исходное уравнение имеет два корня: $-3{,}5$ и $1{,}5$.

Ответ: $-3{,}5$; $1{,}5$.

Упражнения

686. Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4 + 7x^2 - 8 = 0$;
б) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$;
в) $2x^4 - 17x^2 + 35 = 0$;
г) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$;
д) $16y^4 + 15y^2 - 1 = 0$;
е) $y^4 + 2y^2 + 6 = 0$.

687. При каких значениях переменной равно нулю значение трёхчлена:

а) $x^4 - 13x^2 + 36$;
б) $y^4 - 12y^2 + 27$;
в) $-p^4 + p^2 - 0{,}25$;
г) $4x^4 - 5x^2 + 1$;
д) $x^4 - 2{,}5x^2 - 6$;
е) $2y^4 - 17y^2 - 9$?

688. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

а) $y = x^4 - 10x^2 + 9$;
б) $y = 4x^4 - 17x^2 + 4$;
в) $y = x^4 - 9x^2$;
г) $y = x^4 + 4x^2$.

689. Решите уравнение:

а) $x^2 - 3 \cdot |x| - 4 = 0$;
б) $2x^2 - 3 \cdot |x| + 1 = 0$;
в) $x^2 + 4 \cdot |x| + 3 = 0$;
г) $\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x} - 1 = 0$;
д) $3 \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 4 = 0$;
е) $\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x} = 1\frac{1}{4}$.

Замечание. Последнее уравнение данного упражнения составлено персидским учёным Омаром Хайямом (1048—1122).

690. Решите уравнение с помощью введения новой переменной:

а) $x^4 + 5x^2 = 126$;
б) $x^4 + 24 = 10x^2$;
в) $x^4 = 2x^2 + 8$;
г) $x^7 = 2x^5 + 3x^3$.

Замечание. Уравнения этого упражнения составлены арабским учёным XI в. ал-Кархи.

691. Найдите корни уравнения:

а) $(x^2 - 1)^2 - 18(x^2 - 1) + 45 = 0$;
б) $(x^3 + 1)^2 - 10(x^3 + 1) + 9 = 0$.

692. Решите уравнение методом введения новой переменной:

а) $(x^2 + 2x)^2 - 5(x^2 + 2x) - 24 = 0$;
б) $(x^2 - x)^2 - 15(x^2 - x) - 100 = 0$;
в) $3(x^2 + x)^2 - 10x^2 - 10x = 48$;
г) $(y^2 - 2y)^2 - 4y^2 + 8y + 3 = 0$.

693. Найдите удобную замену переменной и решите уравнение:

а) $(x^2 + 3x - 20)(x^2 + 3x + 2) = 240$;
б) $(x^2 - x + 8)(x^2 - x - 6) = 120$.

694. Найдите корни уравнения:

а) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 840$;
б) $x(x - 2)(x - 4)(x - 6) - 105 = 0$;
в) $(x + 4)(x + 6)(x + 8)(x + 10) = 5760$;
г) $(y - 2)(y - 3)(y - 4)(y - 5) - 360 = 0$.

695. Решите уравнение, используя введение новой переменной:

а) $(x^2 + 4x)^2 - (x + 2)^2 = 416$;
б) $(x^2 - 2x)^2 + (x - 1)^2 = 73$;
в) $(x^2 + 6x)^2 - 4(x + 3)^2 = 156$;
г) $3(x^2 + 2x)^2 = 35(x + 1)^2 + 115$.

Упражнения для повторения

696. Найдите наибольшее и наименьшее целые значения переменной x, при которых дробь $\frac{x-8}{100}$ является правильной, дробь $\frac{x+8}{50}$ — неправильной и обе дроби положительные.

697. При каких значениях параметров a и b решением системы $\begin{cases} 2x - y = a, \\ bx - y = 1 \end{cases}$ является пара чисел (4; 5)?

698. В конце учебного года 11 учеников 8 класса сдавали норматив по бегу на 100 метров. Зафиксированные результаты (в секундах) представлены в таблице.

Даниил	15,3	**Стас**	16,1	**Паша**	14,7
Петя	16,9	**Аня**	25,1	**Наташа**	20,2
Лена	21,8	**Оля**	19,9	**Миша**	15,4
Катя	18,4	**Боря**	15,5		

Найдите медиану показанных учениками результатов.

31. Решение задач с помощью квадратных уравнений

Во многих случаях при составлении уравнений по условиям задач получаются квадратные уравнения или уравнения, сводящиеся к квадратным. Такие задачи часто встречаются в математике, физике, технике.

Решение задач с помощью уравнений сводится, как известно, к трём основным этапам:

— обозначить неизвестное число буквой и составить уравнение;

— решить уравнение;

— истолковать результат в соответствии с условием задачи.

Рассмотрим примеры.

Задача 1. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше одного из катетов в $1\frac{1}{4}$ раза. А этот катет больше другого катета на 10 см. Найдите больший катет.

Решение. Пусть больший катет равен x см. Тогда гипотенуза равна $1\frac{1}{4}x$ см, меньший катет равен $(x - 10)$ см. По теореме Пифагора сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, т. е.

$$x^2 + (x - 10)^2 = \left(1\frac{1}{4}x\right)^2.$$

Решим уравнение:

$$x^2 + x^2 - 20x + 100 = \frac{25}{16}x^2,$$

$$32x^2 - 320x + 1600 = 25x^2,$$

$$7x^2 - 320\,x + 1600 = 0,$$

$$\frac{1}{4}D = 160^2 - 7 \cdot 1600 = 14\,400,$$

$$x = \frac{160 \pm 120}{7},$$

$$x_1 = 40, \quad x_2 = 5\frac{5}{7}.$$

По условию задачи значение x должно быть больше 10. Этому условию удовлетворяет лишь первый корень — число 40.

Ответ: 40 см.

Задача 2. Через какое время тело, брошенное вертикально вверх со скоростью 30 м/с, окажется на высоте 40 м (без учёта сопротивления воздуха)?

Решение. Воспользуемся формулой

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где h (в м) — высота, которой достигает тело через t с, v_0 (в м/с) — начальная скорость и g (в м/с^2) — ускорение свободного падения, приближённо равное 10 м/с^2. Подставляя в эту формулу вместо переменных h, v_0 и g их значения, получим уравнение

$$40 = 30t - 5t^2.$$

Отсюда

$$5t^2 - 30t + 40 = 0,$$

$$t^2 - 6t + 8 = 0.$$

По дополнительной формуле корней квадратного уравнения найдём:

$$t = \frac{3 \pm 1}{1},$$

$$t_1 = 4, \quad t_2 = 2.$$

Ответ: 2 с и 4 с.

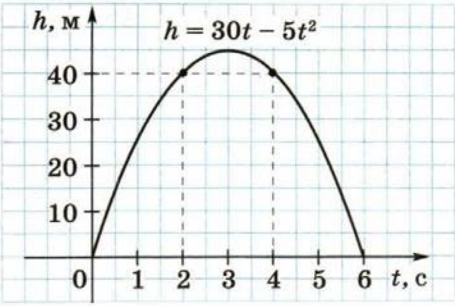


Рис. 38

Заметим, что оба результата (2 с и 4 с) удовлетворяют условиям задачи. Первый раз тело окажется на высоте 40 м во время его подъёма через 2 с после момента бросания. Второй раз оно будет на той же высоте через 4 с, но уже во время падения. Иллюстрацию решения даёт график зависимости h от t, выраженной формулой $h = 30t - 5t^2$ (рис. 38).

Упражнения

699. Площадь прямоугольника, длина которого на 5 см больше ширины, равна 126 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

700. Найдите периметр прямоугольника, одна сторона которого на 3 см меньше другой, а его диагональ равна 15 см.

701. Одна сторона прямоугольника на 1 см короче диагонали и на 7 см длиннее смежной с ней стороны. Найдите площадь прямоугольника.

702. На облицовку стены пошло 504 плитки. Причём в каждом ряду плиток было на 3 меньше, чем число рядов. Сколько было рядов?

703. Длина прямоугольника на 2 м больше его ширины. Если ширину увеличить на 3 м, а длину — на 8 м, то площадь увеличится в 3 раза. Найдите стороны прямоугольника.

704. Радиус одной из двух окружностей, имеющих общий центр, на 5 см больше радиуса другой. Площадь кольца, заключённого между этими окружностями, составляет 1,25 площади малого круга. Найдите радиусы окружностей.

705. Изготовили 185 деталей. Их разложили поровну в несколько больших ящиков и 9 деталей положили в маленький ящик. В каждый большой вошло деталей на 5 меньше, чем было больших ящиков. Сколько было больших ящиков?

706. Сумма квадратов двух последовательных нечётных натуральных чисел равна 290. Найдите эти числа.

707. Произведение двух последовательных чисел, кратных 3, на 18 больше учетверённого большего из этих чисел. Найдите эти числа.

708. При розыгрыше первенства школы по волейболу была проведена 21 игра, причём каждая команда сыграла с каждой из остальных команд один раз. Сколько команд участвовало в розыгрыше?

709. Если число сторон выпуклого многоугольника удвоить, то число его диагоналей увеличится на 30. Найдите число сторон этого многоугольника.

710. В старшем разряде двузначного числа на одну единицу больше, чем в младшем. Если это число умножить на число, полученное перестановкой его цифр, то получится 736. Найдите данное двузначное число.

711. Дано двузначное число с одинаковыми цифрами. Если в старший разряд добавить одну единицу, а в младший две и полученное число умножить на данное, то произведение будет равно 2464. Найдите данное число.

712. Сколько вершин имеет выпуклый многоугольник, в котором диагоналей на 25 больше, чем сторон?

713. Бак наполнен спиртом. Из бака вылили часть спирта и дополнили его водой. Потом из бака вылили столько же литров смеси. В баке осталось 49 л спирта. Сколько литров спирта вылили в первый раз и сколько во второй раз, если вместимость бака 64 л?

714. Имеется два тридцатилитровых сосуда, в которых содержится всего 30 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, из которого затем переливают 12 л новой смеси в первый. Сколько литров спирта было сначала в каждом сосуде, если во втором оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом?

Упражнения для повторения

715. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2ab+2by+ay+y^2}{2ab-2by+ay-y^2}$; б) $\dfrac{9x^2+6x+4}{27x^3-8}$.

716. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

а) $y = 7x + 1{,}4$; б) $y = 2x^2 + 9x - 5$.

717. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2-x}{\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-2\sqrt{x}\right)}$; б) $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}+b}$.

? Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение квадратного уравнения.

2. Какие квадратные уравнения называются неполными? Приведите примеры неполных квадратных уравнений.

3. Сформулируйте определение дискриминанта квадратного уравнения. Сколько корней может иметь квадратное уравнение?

4. Напишите основную формулу корней квадратного уравнения.

5. Напишите формулу корней квадратного уравнения со вторым чётным коэффициентом.

§ 10. Свойства корней квадратного уравнения

32. Теорема Виета

Особого внимания заслуживают квадратные уравнения, в которых старший коэффициент равен единице. Такие уравнения называются *приведёнными*. Если в приведённом квадратном уравнении обозначить второй коэффициент буквой p, а свободный член буквой q, то уравнение будет иметь вид

$$x^2 + px + q = 0.$$

Из основной формулы корней квадратного уравнения можно получить более простую формулу корней приведённого квадратного уравнения:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}, \text{ где } D = p^2 - 4q.$$

Рассмотрим свойства корней приведённого квадратного уравнения.

Решим уравнение $(x - 3)(x - 5) = 0$. Левая часть уравнения есть произведение двух множителей $x - 3$ и $x - 5$. Так как это произведение равно нулю, то $x - 3 = 0$ или $x - 5 = 0$.

Значит, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$.

Раскроем скобки в левой части уравнения и приведём подобные слагаемые:

$$x^2 - 3x - 5x + 15 = 0, \quad x^2 - 8x + 15 = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, замечаем, как в этом квадратном уравнении образуется второй коэффициент и свободный член. Второй коэффициент получается при сложении чисел, противоположных корням уравнения, а свободный член — при умножении корней. Этим свойством обладают корни любого приведённого квадратного уравнения.

Свойство корней приведённого квадратного уравнения выражается теоремой, названной *теоремой Виета* по имени знаменитого французского математика Франсуа Виета (1540—1603).

Франсуа Виет (1540—1603) — французский математик, по профессии юрист; ввёл буквенные обозначения не только для неизвестных величин, но и для коэффициентов уравнения («Введение в аналитическое искусство», 1591). Ему принадлежит установление единообразного приёма решения уравнений 2, 3 и 4-й степеней. Виет получил существенные результаты в тригонометрии, астрономии, криптографии; с появлением его работ в научных кругах Европы стали использоваться десятичные дроби. Среди своих открытий Виет особенно высоко ценил установленную им зависимость между корнями и коэффициентами уравнений.

Теорема Виета. Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Доказательство. Рассмотрим приведённое квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0.$$

Если дискриминант этого уравнения больше нуля, то уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}.$$

Найдём сумму корней:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} + \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p.$$

Сумма корней равна $-p$, т. е. второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком:

$$x_1 + x_2 = -p.$$

Найдём произведение корней:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4} =$$

$$= \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Произведение корней равно q, т. е. свободному члену:

$$x_1 x_2 = q.$$

Теорема доказана.

Если дискриминант квадратного уравнения равен нулю, то уравнение имеет один корень. Его можно найти по формуле корней

$$x = \frac{-p \pm 0}{2}.$$

Если положить

$$x_1 = \frac{-p + 0}{2} = -\frac{p}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-p - 0}{2} = -\frac{p}{2},$$

то и в этом случае теорема Виета останется верной. Действительно,

$$x_1 + x_2 = \frac{-p + 0}{2} + \frac{-p - 0}{2} = -\frac{p}{2} + \left(-\frac{p}{2}\right) = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p + 0}{2} \cdot \frac{-p - 0}{2} = -\frac{p}{2} \cdot \left(-\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}.$$

Но так как $D = p^2 - 4q = 0$, то $p^2 = 4q$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4} = \frac{4q}{4} = q.$

Так как квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ равносильны, то для неприведённого квадратного уравнения теорема Виета формулируется так: если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то справедливы равенства

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Для приведённого квадратного уравнения справедлива теорема, обратная теореме Виета:

> **Теорема, обратная теореме Виета.** Если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство. Пусть $x^2 + px + q = 0$ — приведённое квадратное уравнение, а числа m и n такие, что $m + n = -p$ и $mn = q$. Подставив в это уравнение вместо p равное ему число $-(m + n)$, вместо q равное ему число mn, получим равносильное ему уравнение

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0.$$

Преобразуем левую часть получившегося уравнения:

$$x^2 - mx - nx + mn = 0,$$
$$x(x - m) - n(x - m) = 0,$$
$$(x - m)(x - n) = 0.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{matrix} x - m = 0 \\ x_1 = m, \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} x - n = 0, \\ x_2 = n. \end{matrix}$$

Значит, числа m и n являются корнями уравнения

$$x^2 + px + q = 0.$$

Теорема доказана.

Для неприведённого квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ теорема, обратная теореме Виета, формулируется так: *если числа m и n таковы, что $m + n = -\frac{b}{a}$ и $mn = \frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.*

Пример 1. Найдём сумму и произведение корней уравнения

$$\frac{1}{2}x^2 - 7x - 4 = 0.$$

Уравнение $\frac{1}{2}x^2 - 7x - 4 = 0$ имеет корни, так как

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4) > 0.$$

Те же корни имеет и равносильное ему приведённое квадратное уравнение $x^2 - 14x - 8 = 0$, полученное при умножении обеих частей уравнения $\frac{1}{2}x^2 - 7x - 4 = 0$ на 2.

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = 14, \quad x_1x_2 = -8.$$

Пример 2. Выясним, верно ли решено уравнение $x^2 + 4x - 21 = 0$, если в ответе получились числа 3 и −7.

Сумма чисел 3 и −7 равна второму коэффициенту приведённого квадратного уравнения $x^2 + 4x - 21 = 0$, взятому с противоположным знаком, а их произведение равно свободному члену:

$$3 + (-7) = -4; \quad 3 \cdot (-7) = -21.$$

Значит, по теореме, обратной теореме Виета, числа 3 и −7 являются корнями уравнения $x^2 + 4x - 21 = 0$.

Пример 3. Составим квадратное уравнение, корнями которого были бы числа $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{2}{3}$.

Найдём сумму и произведение чисел $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{2}{3}$:

$$-\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{7}{6},$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Напишем приведённое квадратное уравнение, в котором вторым коэффициентом является $\frac{7}{6}$, свободным членом $\frac{1}{3}$:

$$x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета, числа $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{2}{3}$ являются корнями этого уравнения.

Уравнение $x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$ сохранит те же корни, если обе его части умножить, например, на 6:

$$6x^2 + 7x + 2 = 0.$$

Ответом для задания в примере будет либо приведённое квадратное уравнение $x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$, либо какое угодно равносильное ему неприведённое квадратное уравнение.

Упражнения

718. Выведите формулу корней приведённого квадратного уравнения, имеющего чётный второй коэффициент.

719. Решите приведённое квадратное уравнение:

а) $x^2 - 8x + 15 = 0$;
в) $x^2 + 13x + 42 = 0$;
б) $x^2 + 2x - 8 = 0$;
г) $x^2 - 9x - 10 = 0$.

720. По теореме Виета найдите сумму и произведение корней уравнения (если эти корни существуют):

а) $x^2 + 9x - 10 = 0$;
б) $m^2 - 1{,}1m - 0{,}6 = 0$;
в) $t^2 + 42{,}5t + 100 = 0$;
г) $-x^2 + 5x + 24 = 0$;
д) $40m^2 + 38m - 15 = 0$;
е) $54y^2 + 69y + 20 = 0$.

721. Найдите второй коэффициент и свободный член приведённого квадратного уравнения $y^2 + py + q = 0$, если его корнями являются числа:

а) 10 и -6; б) -3 и -8; в) $\frac{2}{5}$ и $-\frac{1}{2}$; г) $-\frac{5}{8}$ и $\frac{11}{12}$.

722. При каких значениях y и z сумма корней уравнения $x^2 + 3x - 10 = 0$ равна $2y - z$, а их произведение равно $y + 2z$?

723. При каких условиях сумма корней приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна их произведению?

724. В каких случаях сумма и произведение корней приведённого квадратного уравнения являются противоположными числами?

725. Среди пар чисел $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right)$, $(11;\ -7)$ и $\left(1\frac{1}{3};\ -1\frac{1}{4}\right)$ найдите такую пару, которая составлена из корней уравнения:

а) $x^2 - 4x - 77 = 0$;
в) $6x^2 - 5x + 1 = 0$;
б) $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$;
г) $12x^2 - x - 20 = 0$.

726. Решите уравнение по формуле корней и сделайте проверку по теореме, обратной теореме Виета:

а) $x^2 - 5x - 36 = 0$;
в) $x^2 - 1\frac{1}{12}x - 1\frac{3}{8} = 0$;
б) $x^2 - 16x + 55 = 0$;
г) $32x^2 + 44x + 15 = 0$.

727. Один из корней уравнения $x^2 + px + 54 = 0$ равен 6. Найдите другой корень и второй коэффициент.

728. Число $-\frac{2}{3}$ — один из корней уравнения $9x^2 + 3x + q = 0$. Найдите другой корень и свободный член.

729. Уравнение $12x^2 + px + 1 = 0$ имеет одним из корней число $\frac{1}{4}$. Найдите другой корень и второй коэффициент.

730. Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Его корни x_1 и x_2. Найдите:

а) x_1 и b, если $a = 1$, $x_2 = 14$ и $c = -140$;

б) x_1 и c, если $a = 1$, $x_2 = -30$ и $b = 18$;

в) x_1 и b, если $a = 10$, $x_2 = \frac{2}{5}$ и $c = 2$;

г) x_1 и c, если $a = 12$, $x_2 = -\frac{3}{4}$ и $b = 17$.

731. При каком значении c один из корней уравнения $4x^2 - 20x + c = 0$ на 2 меньше другого?

732. Найдите значение b, при котором один из корней уравнения $2x^2 - bx + 3 = 0$ в 6 раз больше другого.

733. Разность корней квадратного уравнения $x^2 - 4x + q = 0$ равна 20. Найдите q.

734. Один из корней квадратного уравнения $24x^2 - 10x + q = 0$ на $\frac{1}{12}$ больше другого. Найдите q.

735. Разность квадратов корней приведённого квадратного уравнения равна 24. Второй коэффициент этого уравнения равен 2. Найдите свободный член уравнения.

736. Не производя вычислений по формуле корней квадратного уравнения, определите знаки корней уравнения:

а) $x^2 - 17x + 4 = 0$;
б) $x^2 + 20x + 5 = 0$;
в) $x^2 + 30x - 1 = 0$;
г) $x^2 - 25x - 2 = 0$;
д) $3x^2 - 5x + 2 = 0$;
е) $2x^2 + 9x + 3 = 0$;
ж) $5x^2 + 10x - 4 = 0$;
з) $\frac{1}{6}x^2 - 11x - 8 = 0$.

737. *Устно.* Найдите корни уравнения:

а) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
б) $x^2 - x - 6 = 0$;
в) $x^2 + 5x + 6 = 0$;
г) $x^2 + x - 6 = 0$.

738. *Устно.* Найдите корни уравнения:

а) $x^2 - (3 + a)x + 3a = 0$;
б) $x^2 + (3 + a)x + 3a = 0$;
в) $x^2 - (3 - a)x - 3a = 0$;
г) $x^2 + (3 - a)x - 3a = 0$.

739. Докажите, что ни при каком значении b корни уравнения:

а) $x^2 + bx - 3 = 0$ не могут иметь одинаковых знаков;
б) $2x^2 + bx + 5 = 0$ не могут иметь разных знаков.

740. Уравнения $x^2 + 2p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + 2p_2x + q_2 = 0$ таковы, что $q_1 + q_2 = 2p_1p_2$. Докажите, что если одно из них не имеет корней, то второе имеет корни.

741. Докажите, что если в уравнении $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q — целые числа и уравнение имеет рациональные корни, то эти корни — целые числа.

742. При каких значениях n:

а) один из корней уравнения $x^2 - 8x + 4n^2 - 1 = 0$ равен нулю;
б) корни уравнения $x^2 + (2n - 7)x - 3 = 0$ являются противоположными числами;
в) корни уравнения $x^2 - 100x + 3n - 2 = 0$ являются взаимно обратными числами?

743. Сумма коэффициентов квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна нулю тогда и только тогда, когда один корень уравнения равен 1, а второй равен $\frac{c}{a}$. Докажите это утверждение.

744. Сумма старшего коэффициента и свободного члена квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна среднему коэффициенту тогда и только тогда, когда один корень уравнения равен -1, а второй равен $-\frac{c}{a}$. Докажите это утверждение.

745. *Устно.* Найдите корни уравнения:

а) $35x^2 - 59x + 24 = 0$;
б) $138x^2 + 135x - 3 = 0$;
в) $78x^2 - 55x - 23 = 0$;
г) $5{,}13x^2 + 6{,}2x + 1{,}07 = 0$.

746. Составьте приведённое квадратное уравнение, если его корнями являются:

а) 3 и 4;
б) 3 и -4;
в) -3 и 4;
г) -3 и -4.

747. Составьте приведённое квадратное уравнение, если его корнями являются:

а) a и $2a$; б) a и $-2a$; в) $-a$ и $2a$; г) $-a$ и $-2a$.

748. Составьте приведённое квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, если один из его корней равен:

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}-1$; в) $-\sqrt{5}$; г) $2-\sqrt{5}$.

Упражнения для повторения

749. Один катет прямоугольного треугольника на $\frac{1}{2}$ см больше другого. Гипотенуза равна 2,5 см. Найдите периметр треугольника.

750. Отношение диагонали прямоугольника к его длине равно 5 : 4. Ширина прямоугольника 6 см. Найдите его площадь.

751. Найдите значение квадратного трёхчлена

$$\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-33 \quad \text{при} \quad x=-9;\ -3;\ 0;\ 10;\ 11.$$

752. При каком значении a уравнения $x^2-ax+1=0$ и $x^2-x+a=0$ имеют общий корень?

753. Докажите, что если число $m-2\sqrt{k}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$ и $k \in \boldsymbol{N}$, является корнем уравнения $x^2+px+q=0$, в котором p и q — рациональные числа, то число $m+2\sqrt{k}$ также является корнем этого уравнения.

33. Выражения, симметрические относительно корней квадратного уравнения

Рассмотрим выражения с двумя переменными:

$$ab-a-b, \quad (a-b)^2, \quad \frac{a+b}{a^2+b^2}.$$

Если в каждом из них переставить переменные, т. е. везде вместо a поставить b и вместо b поставить a, то получим тождественно равные им выражения:

$$ba-b-a=ab-a-b,$$

$$(b-a)^2=(a-b)^2,$$

$$\frac{b+a}{b^2+a^2}=\frac{a+b}{a^2+b^2}.$$

Такие выражения называют *симметрическими* относительно входящих в них переменных.

Определение. **Выражение с двумя переменными называется симметрическим относительно этих переменных, если при перестановке этих переменных получается тождественно равное ему выражение.**

Например, симметрическими выражениями относительно двух переменных являются суммы и произведения натуральных степеней этих переменных, а также выражения, полученные из них с помощью сложения, вычитания, умножения и деления:

$$a + b, \quad a^2 + b^2, \quad a^3 + b^3, \quad a^4 + b^4, \quad \ldots,$$

$$ab, \quad a^2b^2, \quad a^3b^3, \quad a^4b^4, \quad \ldots,$$

$$ab(a^2 + b^2), \quad \frac{a+b}{a^2+b^2}, \quad a^4b^4 + a^3b^3, \quad a^4b^4 - (a^3 + b^3), \quad \ldots .$$

Симметрическими выражениями являются также чётные степени разности двух переменных. Нечётные степени разности двух переменных симметрическими выражениями не являются.

Наиболее простыми симметрическими выражениями относительно двух переменных являются сумма и произведение этих переменных, т. е. $a + b$ и ab. Через $a + b$ и ab можно выразить любое рациональное симметрическое выражение относительно a и b.

Для примера выразим симметрические относительно a и b выражения $(a - b)^2$ и $(a - b)^4$ через $a + b$ и ab:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = (a + b)^2 - 4ab;$$

$$(a - b)^4 = ((a - b)^2)^2 = ((a + b)^2 - 4ab)^2.$$

Простейшие симметрические выражения относительно корней квадратного уравнения встречаются в теореме Виета. Это позволяет использовать их при решении некоторых задач, относящихся к квадратным уравнениям. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Не решая этого уравнения, выразим через p и q суммы $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$ и $x_1^4 + x_2^4$.

Выражения $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$ и $x_1^4 + x_2^4$ — симметрические относительно x_1 и x_2. Выразим их через $x_1 + x_2$ и x_1x_2, а затем применим теорему Виета. Начнём с суммы квадратов корней:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q.$$

Используя полученный результат, выразим сумму кубов и сумму четвёртых степеней корней:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) =$$
$$= -p(p^2 - 2q - q) = -p^3 + 3pq;$$
$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (p^2 - 2q)^2 - 2q^2 =$$
$$= p^4 - 4p^2q + 4q^2 - 2q^2 = p^4 - 4p^2q + 2q^2.$$

Пример 2. Не решая уравнение $x^2 + px + q = 0$, имеющее корни x_1 и x_2, выразим через p и q выражения $(x_1 - x_2)^2$ и $(x_1 - x_2)^4$.

Выражения $(x_1 - x_2)^2$ и $(x_1 - x_2)^4$ — симметрические относительно x_1 и x_2. Выразим их через $x_1 + x_2$ и x_1x_2, а затем применим теорему Виета:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (-p)^2 - 4q = p^2 - 4q;$$
$$(x_1 - x_2)^4 = ((x_1 - x_2)^2)^2 = (p^2 - 4q)^2 = p^4 - 8p^2q + 16q^2.$$

Пример 3. Найдём такое значение q, при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x + q = 0$ равна 13.

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + x + q = 0$. По условию

$$x_1^2 + x_2^2 = 13.$$

Левая часть уравнения — симметрическое выражение относительно x_1 и x_2. Выразим его через $x_1 + x_2$ и x_1x_2, получим уравнение

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 13.$$

Так как $x_1 + x_2 = -1$ и $x_1x_2 = q$, то получим

$$(-1)^2 - 2q = 13.$$

Отсюда $q = -6$.

Упражнения

754. Является ли симметрическим относительно x и y выражение:

а) $x^3y^4 + x^4y^3$; в) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; д) $(x^2 - 5)(y^2 - 5)$;

б) $(x - y)^5$; г) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y}$; е) $(x - y)(x^3 - y^3)$?

755. Выразите через $u + v$ и uv:

а) $u^3 + v^3$; в) $u^3 + v^3 - 4uv^2$; д) $(u^2 - v^2)(u - v)$;

б) $u^2 - 3uv + v^2$; г) $\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2}$; е) $(u^3 + v^3)(u + v)$.

756. Известно, что $a^2 + b^2 = p$, $a + b = q$. Выразите через p и q выражение ab.

757. Известно, что $a^3 + b^3 = m$, $a + b = n$. Выразите через m и n выражение ab.

758. Не решая уравнение $x^2 - 2x - 40 = 0$, корни которого равны x_1 и x_2, найдите значение выражения:

а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $(x_1 - x_2)^2$; в) $x_1^3 + x_2^3$; г) $(x_1 - x_2)^4$.

759. Уравнение $6x^2 + x - 2 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Не решая уравнения, найдите:

а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $x_1^4 + x_2^4$; в) $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$; г) $(x_1^2 + x_2^2)^2$.

760. Выразите через коэффициенты уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

а) квадрат суммы его корней;

б) квадрат разности его корней;

в) сумму квадратов его корней;

г) сумму кубов его корней.

761. Найдите коэффициент p уравнения $x^2 + px + 42 = 0$, если квадрат разности его корней равен 1.

762. Сумма квадратов корней уравнения

$$12x^2 - 17x + c = 0$$

равна $1\frac{1}{144}$. Найдите свободный член уравнения.

763. Не решая уравнение $x^2 - 2x - 8 = 0$, найдите значение выражения $x_1^5x_2 + x_1x_2^5$, если x_1 и x_2 — корни этого уравнения.

764. Уравнение $2x^2 - x - 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Найдите значение выражения $x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4$, не решая уравнения.

765. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Составьте квадратное уравнение, корни которого:

а) x_1^2 и x_2^2; б) $\frac{x_1}{x_2}$ и $\frac{x_2}{x_1}$.

766. Составьте квадратное уравнение, корни которого обратны квадратам корней уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Упражнения для повторения

767. Решите уравнение:

а) $8x^2 - 3x = 0$; б) $7x^2 + 4x = 0$.

768. При каком значении $n \neq 0$ один из корней уравнения $x^2 - 7x + 2n = 0$ в 2 раза больше одного из корней уравнения $x^2 - 5x + n = 0$?

769. Упростите выражение:

а) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$.

34. Разложение квадратного трёхчлена на множители

Найдём значение квадратного трёхчлена $3x^2 - 7x + 2$ при $x = 2$:

$$3x^2 - 7x + 2 = 3 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 2 = 0.$$

При $x = 2$ квадратный трёхчлен $3x^2 - 7x + 2$ обращается в нуль. Такое значение переменной называют корнем квадратного трёхчлена.

Определение. Корнем квадратного трёхчлена называется значение переменной, при котором значение квадратного трёхчлена равно нулю.

Чтобы найти корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, достаточно решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Найдём, например, корни квадратного трёхчлена $3x^2 - 7x + 2$. Для этого решим квадратное уравнение $3x^2 - 7x + 2 = 0$:

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25,$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{6},$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Значит, квадратный трёхчлен $3x^2 - 7x + 2$ имеет два корня: 2 и $\frac{1}{3}$.

Число корней квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ зависит от числа корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, а следовательно, от его дискриминанта. Дискриминант квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ называют также *дискриминантом квадратного трёхчлена* $ax^2 + bx + c$.

В зависимости от дискриминанта квадратный трёхчлен так же, как квадратное уравнение, может иметь два корня, один корень или вовсе не иметь корней.

Корни квадратного трёхчлена можно использовать при его разложении на множители.

Пример 1. Разложим на множители трёхчлен

$$x^2 - 23x + 112.$$

Найдём корни квадратного трёхчлена $x^2 - 23x + 112$:

$$x^2 - 23x + 112 = 0,$$
$$D = 529 - 4 \cdot 112 = 81,$$
$$x = \frac{23 \pm 9}{2},$$
$$x_1 = 16, \quad x_2 = 7.$$

По теореме Виета второй коэффициент –23 равен $-(16 + 7)$. Подставим это выражение в квадратный трёхчлен $x^2 - 23x + 112$ вместо второго коэффициента, раскроем скобки и применим способ группировки:

$$x^2 - 23x + 112 = x^2 - (16 + 7)x + 112 =$$
$$= x^2 - 16x - 7x + 112 = x(x - 16) - 7(x - 16) =$$
$$= (x - 16)(x - 7).$$

Так как первый коэффициент квадратного трёхчлена равен единице, то при разложении на множители получилось два множителя. Первый из них есть разность между переменной и одним корнем, второй — разность между переменной и другим корнем. Если бы первый коэффициент был отличен от единицы, то он был бы добавлен к этому произведению в качестве третьего множителя.

Теорема. Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Доказательство. Корни x_1 и x_2 квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Применяя теорему Виета, получим:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \;\; x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Отсюда

$$b = -a(x_1 + x_2), \quad c = ax_1x_2.$$

Подставим получившиеся выражения вместо b и c в квадратный трёхчлен и выполним преобразования:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 =$$
$$= ax^2 - ax_1x - ax_2x + ax_1x_2 = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) =$$
$$= a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Значит, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Доказанная теорема позволяет, найдя корни квадратного трёхчлена, записать его в виде произведения первого коэффициента, разности переменной и одного корня и разности переменной и другого корня.

Пример 2. Разложим на множители квадратный трёхчлен $2x^2 + 5x - 12$. Найдём корни трёхчлена:

$$2x^2 + 5x - 12 = 0,$$
$$D = 25 + 96 = 121,$$
$$x = \frac{-5 \pm 11}{4}, \quad x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -4.$$

Применим теорему о разложении трёхчлена на множители:

$$2x^2 + 5x - 12 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 4) = (2x - 3)(x + 4).$$

Пример 3. Разложим на множители квадратный трёхчлен $4x^2 - 20x + 25$. Найдём корни трёхчлена:

$$4x^2 - 20x + 25 = 0,$$
$$D = 400 - 400 = 0,$$
$$x = \frac{20 \pm 0}{8}, \quad x_1 = \frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{5}{2}.$$

Применим теорему о разложении на множители квадратного трёхчлена:

$$4x^2 - 20x + 25 = 4\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) =$$
$$= (2x - 5)(2x - 5) = (2x - 5)^2.$$

Теорема о разложении на множители квадратного трёхчлена применима лишь в тех случаях, когда трёхчлен имеет корни. Если квадратный трёхчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на множители, т. е. представить в виде произведения многочленов первой степени. Докажем это утверждение.

Предположим, что в этом случае квадратный трёхчлен можно представить в виде произведения многочленов первой степени:

$$ax^2 + bx + c = (mx + n)(kx + p),$$

где m, n, k и p — числа, причём $m \neq 0$, $k \neq 0$.

При $x = -\frac{n}{m}$ значение квадратного трёхчлена равно нулю, так как значение первого множителя произведения $(mx + n)(kx + p)$ равно нулю:

$$mx + n = m\left(-\frac{n}{m}\right) + n = -n + n = 0.$$

Значит, число $-\frac{n}{m}$ является корнем квадратного трёхчлена, что противоречит условию, согласно которому трёхчлен не имеет корней.

Упражнения

770. Разложите на множители:

а) $-2x^2 + 5x + 18$; б) $15y^2 + y - 6$; в) $-12m^2 + 5m + 3$; г) $3x^2 + 0{,}9x - 2{,}1$; д) $5k^2 + 8k + 3{,}2$; е) $3p^2 - 0{,}27$.

771. Можно ли разложить на множители квадратный трёхчлен:

а) $x^2 - 9x - 10$; б) $3m^2 - 6m + 4$; в) $\frac{1}{3}p^2 + 2p + 3$; г) $-\frac{1}{2}y^2 + 6y - 20$?

772. Разложите на множители:

а) $3x^3 - 9x^2 + 6x$; б) $y^3 + 4y^2 - 32y$; в) $x^3 - 9x^2 + 18x - ax^2 + 9ax - 18a$; г) $2y^3 + my^2 + 6y^2 + 3my - 20y - 10m$.

773. Представьте в виде произведения многочленов первой степени:

а) $12x^3 - 22x^2 - 20x$; б) $80my^2 - 12my - 8m$; в) $30x^3 + 5x^2 - 60x$; г) $20km^2 - 92km - 40k$.

774. Разложите на множители:

а) $2x^2 - 5xy + 2y^2$; б) $2x^2 - 3xy - 2y^2$; в) $2x^2 + xy - 6y^2$; г) $6y^2 + xy - 2x^2$.

775. Сократите дробь:

а) $\frac{6y^2 + 13y - 5}{12y - 4}$; б) $\frac{4x^2 - 9}{6x^2 - 5x - 6}$; в) $\frac{2k^2 - 11k - 21}{8k^2 + 6k - 9}$; г) $\frac{-12p^2 + 40p - 25}{20 + 7p - 6p^2}$.

776. Сократите дробь:

а) $\frac{15mx^2 - 22mx + 8m}{60x^2 - 38x - 8}$; б) $\frac{18ay^2 + 39ay - 15a}{24ay^2 + 42ay - 45a}$.

777. Выполните действия:

а) $\frac{x^2 - 5x - 14}{x + 4} \cdot \frac{x^2 + 7x + 12}{x - 7}$; б) $\frac{2x}{x^2 + 8x - 20} - \frac{x}{(x - 2)(x + 4)}$; в) $\frac{x^2 + 4x - 77}{4x + 4} : \frac{x^2 + 13x + 22}{2x + 2}$; г) $\frac{x}{x^2 - 6x - 72} + \frac{3}{x^2 + 3x - 18}$.

778. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{2a^2}{2a^2-7a+3}+\frac{a}{3-a}\right)\cdot\left(a-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\frac{9a^2-4}{3a^2+11a-4}\cdot\frac{1-3a}{2-3a}-\frac{a-6}{a+4}$;

в) $\frac{3x+1}{x^2-4\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}}:\frac{9x^2-1}{x^2-\frac{11}{2}x+2\frac{1}{2}}+1$;

г) $1-\frac{2x^2+9x-5}{x^2+x-6}:\frac{2x^2-3x+1}{x^2+5x+6}$.

779. Постройте график функции:

а) $y=\frac{x^2-4\frac{1}{2}x-9}{2x+3}$;

б) $y=\frac{6x^2-x-2}{3x-2}$.

Упражнения для повторения

780. Буквами α и β обозначены корни уравнения $x^2-7x-2=0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения:

а) $(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$;

б) $(\alpha-\beta)^2+3\alpha\beta$;

в) $2(\alpha-\beta)^2-10$;

г) $\frac{1}{3}(\alpha-\beta)^2-\alpha\beta$.

781. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2-8}{3}-\frac{3-2x^2}{4}=1$;

б) $\frac{x-1}{2}=\frac{x^2-2}{3}-\frac{1}{6}$.

782. Разложите на множители:

а) $-5y^2+15y+4ay-12a$;

б) $3m^3-3mn^2+2m^2n-2n^3$.

783. Сторона одного квадрата на 3 см больше стороны другого. Найдите стороны квадратов, если сумма их площадей равна 317 см^2.

? Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте и докажите теорему Виета. Чему равна сумма и произведение корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$?

2. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Виета.

3. Приведите пример симметрического выражения относительно двух переменных. Напишите простейшие симметрические выражения.

4. Сформулируйте определение корня квадратного трёхчлена. Сколько корней имеет квадратный трёхчлен?

5. Сформулируйте и докажите теорему о разложении на множители квадратного трёхчлена.

§ 11. Дробно-рациональные уравнения

35. Решение дробно-рациональных уравнений

До сих пор мы занимались *целыми уравнениями*, т. е. такими уравнениями, в которых обе части являются целыми выражениями. Примерами целых уравнений могут быть уравнения $2x - 7 = 8x + 5$, $\frac{x+1}{6} = 1 + \frac{3x-1}{4}$. К целым уравнениям относятся линейные и квадратные уравнения.

Если одна часть уравнения — целое выражение, а другая — дробно-рациональное или обе части — дробно-рациональные выражения, то уравнение называют *дробно-рациональным уравнением*. Примерами дробно-рациональных уравнений являются уравнения: $\frac{1}{x} = 5x + 3$; $\frac{x+7}{x} = \frac{x-1}{x+2} + 1$.

Некоторые целые уравнения можно привести к линейным или квадратным уравнениям. Рассмотрим два примера.

Пример 1. Решим уравнение

$$x - \frac{x+1}{3} = \frac{2x-1}{5}.$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей $\frac{x+1}{3}$ и $\frac{2x-1}{5}$ — число 15. Получим:

$$15x - 5x - 5 = 6x - 3.$$

Перенесём $6x$ в левую, а -5 в правую часть уравнения (изменив их знаки) и приведём подобные слагаемые:

$$15x - 5x - 6x = 5 - 3,$$
$$4x = 2.$$

Используя свойства уравнений и тождественные преобразования выражений, мы привели целое уравнение $x - \frac{x+1}{3} = \frac{2x-1}{5}$ к равносильному ему линейному уравнению $4x = 2$. Его корнем является число $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 2. Решим целое уравнение

$$\frac{x^2+3}{4} - \frac{x}{3} = \frac{5x-3}{6}. \qquad (1)$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель входящих в него дробей — число 12. Получим:

$$3x^2 + 9 - 4x = 10x - 6.$$

Перенесём в получившемся уравнении все члены из правой части в левую и приведём подобные слагаемые:

$$3x^2 - 14x + 15 = 0. \qquad (2)$$

С помощью свойств уравнений и тождественных преобразований нам удалось свести целое уравнение (1) к равносильному ему квадратному уравнению (2). Решив его, найдём, что оно имеет два корня: 3 и $1\frac{2}{3}$.

Ответ: 3; $1\frac{2}{3}$.

В некоторых случаях к линейным или квадратным уравнениям можно привести и дробно-рациональные уравнения. Однако это приведение отличается важной особенностью. Рассмотрим пример.

Пример 3. Решим уравнение

$$\frac{x+1}{x+3} + \frac{10x}{(x-2)(x+3)} = \frac{4}{x-2}. \qquad (3)$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей — выражение $(x - 2)(x + 3)$. Получим целое уравнение

$$(x - 2)(x + 1) + 10x = 4(x + 3). \qquad (4)$$

Каждый корень уравнения (3) является корнем уравнения (4).

Однако нет оснований утверждать, что уравнения (3) и (4) равносильны, так как левая и правая части уравнения (3) умножались не на число, отличное от нуля, а на выражение с переменной. Ведь если корень уравнения (4) обращает это выражение в нуль, то при этом одна или обе части уравнения (3) не будут иметь смысла. Поэтому не всякий корень уравнения (4) будет корнем уравнения (3).

Используя свойства уравнений и тождественные преобразования, приведём целое уравнение (4) к равносильному ему квадратному уравнению

$$x^2 + 5x - 14 = 0.$$

Его корнями являются числа 2 и −7.

Число 2 обращает в нуль общий знаменатель $(x - 2)(x - 3)$, поэтому оно не является корнем уравнения (3). При $x = -7$ значение выражения $(x - 2)(x + 3)$ не равно нулю. Поэтому −7 является корнем уравнения (3).

Ответ: −7.

Вообще, чтобы решить дробно-рациональное уравнение, целесообразно:

1) привести его к целому уравнению, умножив левую и правую части на общий знаменатель;
2) решить получившееся целое уравнение;
3) исключить из множества корней целого уравнения те корни, при которых левая или правая часть уравнения не имеет смысла, т. е. обращают в нуль общий знаменатель дробей.

Пример 4. Решим уравнение

$$\frac{2}{x}+\frac{x^2+8}{x^2-4x}=\frac{6}{x-4}.$$

Разложим знаменатель второй дроби на множители, получим уравнение

$$\frac{2}{x}+\frac{x^2+8}{x(x-4)}=\frac{6}{x-4}.$$

Приведём это уравнение к целому, для чего обе его части умножим на $x(x-4)$:

$$2(x-4)+x^2+8=6x.$$

Выполнив тождественные преобразования и применив свойство уравнений, получим квадратное уравнение

$$x^2-4x=0.$$

Его корнями являются числа 0 и 4. Оба они не являются корнями дробного уравнения, так как при $x=0$ дробь $\frac{2}{x}$ не имеет смысла, а при $x=4$ дробь $\frac{6}{x-4}$ не имеет смысла.

Ответ: корней нет.

Упражнения

784. Решите уравнение:

а) $\frac{2y^2-3}{y-2}=\frac{3y-11}{2-y}$; г) $\frac{2}{k^2+1}=\frac{9}{3k+4}$;

б) $\frac{m+1}{m+5}=\frac{1-m^2}{6m+30}$; д) $\frac{5}{4x+13}=\frac{1}{2x^2-7}$;

в) $\frac{2x^2+9x}{2x+5}=\frac{4x-10}{4x+10}$; е) $\frac{1}{y^2+y}=\frac{2}{5y+14}$.

785. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{5x+2}{x-2}-\frac{x+40}{x}=0$; г) $\frac{3y+1}{y+2}=\frac{2y-6}{y-3}$;

б) $\frac{3m-4}{m}-\frac{m-1}{m+1}=0$; д) $\frac{4a+3}{5a+12}=\frac{2a+9}{a+4}$;

в) $\frac{2x-1}{x+3}-\frac{x+1}{3x-7}=0$; е) $\frac{4x+1}{x+1}=\frac{5x-4}{2x-2}$.

786. Решите уравнение:

а) $\frac{4m^2-5}{m-3}=\frac{2m+1}{m-3}$;

б) $\frac{3x+20}{x-4}=\frac{16-3x^2}{4-x}$;

в) $\frac{k^2+k}{4k+32}=\frac{6-k}{k+8}$;

г) $\frac{a}{3a+5}-\frac{4a+15}{2a}=0$;

д) $\frac{4m-1}{m+2}+\frac{3-m}{2m-4}=0$;

е) $\frac{2-3x}{6x-1}+\frac{1-9x}{1+3x}=0$.

787. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{12x^2+1}{2x+3}=4x-1$;

б) $2a-5=\frac{7a-5}{3a-9}$;

в) $3y+\frac{2y^2+y}{4y+10}=-3$;

г) $6m=\frac{3m^2+7m}{3m-1}+1$.

788. При каких значениях аргумента x равны соответствующие значения функций:

а) $y=\frac{3x+7}{x-3}$ и $y=2x+1$;

б) $y=7-x$ и $y=\frac{6x^2-4}{2x+11}$?

789. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y=\frac{3-2x}{3x-2}$ и $y=-2x+3$;

б) $y=3x+6$ и $y=\frac{4x^2+x}{x+2}$.

790. Решите уравнение:

а) $\frac{2x-1}{x+3}+\frac{3x+2}{x-2}=8$;

б) $\frac{4m+3}{m-3}-\frac{2m-1}{m+3}=-2$;

в) $1+\frac{9-y}{4-y}=\frac{7-2y}{y+4}$;

г) $\frac{2a^2-2a+16}{9a^2-4}+\frac{a-5}{3a+2}=\frac{a-3}{2-3a}$.

791. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{3y+2}{4y^2+y}+\frac{y-3}{16y^2-1}=\frac{3}{4y-1}$;

б) $\frac{1}{3+2a}-\frac{5a+6}{9-4a^2}=\frac{2}{a}$;

в) $\frac{3x+2}{4x^2-4x+1}=\frac{2x+1}{4x^2-1}-\frac{1}{x}$;

г) $\frac{3x-1}{3x^2+2x}=\frac{1}{x}+\frac{2x-3}{9x^2+12x+4}$.

792. Решите уравнение:

а) $\frac{20}{a^2-4}-\frac{a+1}{2a-4}=\frac{a-3}{a+2}$;

б) $\frac{1}{4p^2-12p+9}+\frac{3p+1}{4p-6}=\frac{2p-1}{2p-3}$.

793. При каких значениях переменной:

а) сумма дробей $\frac{2x-3}{x+5}$ и $\frac{3x+1}{x-5}$ равна их произведению;

б) разность дробей $\frac{4x+1}{x-2}$ и $\frac{2x-5}{x+3}$ равна дроби $\frac{4x-47}{x^2+x-6}$?

794. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2}{4}+\frac{9}{x^2}=3\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}\right)+1\frac{3}{4}$;

б) $\left(\frac{x^2}{x-2}\right)^2+\frac{2x^2-3x+6}{x-2}=0$.

Упражнения для повторения

795. Разложите на множители:

а) $x^2-10x+36$;

б) $-x^2+7x-10$;

в) $3k^2-8k-28$;

г) $-2m^2+5m-3$.

796. Составьте квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения $6x^2-x-1=0$.

797. Решите относительно x уравнение:

а) $x^2-5mx+4m^2=0$;

б) $mx^2-26x+25=0$.

798. Упростите выражение:

а) $\sqrt{9-4\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$;

б) $\sqrt{49-12\sqrt{5}}\cdot\sqrt{49+12\sqrt{5}}$.

799. Пересекаются ли графики функций

$$y=4x^2-4x-3 \quad \text{и} \quad y=3x^2+2x-2?$$

36. Решение задач с помощью уравнений

Задача. Знаменатель обыкновенной дроби на 2 больше числителя. Если числитель дроби увеличить в 2 раза, а знаменатель увеличить на 16, то дробь уменьшится на $\frac{1}{4}$. Найдите эту дробь.

Решение. Пусть числитель дроби равен x, тогда её знаменатель равен $x + 2$. После увеличения числителя в 2 раза, а знаменателя на 16 получается дробь $\frac{2x}{x+18}$. Так как полученная дробь меньше данной дроби $\frac{x}{x+2}$ на $\frac{1}{4}$, то

$$\frac{x}{x+2} - \frac{2x}{x+18} = \frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Решим дробно-рациональное уравнение. Умножим левую и правую части уравнения (1) на $4(x + 2)(x + 18)$. Выполнив далее тождественные преобразования и применив свойства уравнений, получим квадратное уравнение

$$5x^2 - 36x + 36 = 0.$$

Решим это уравнение:

$$\frac{1}{4}D = (-18)^2 - 5 \cdot 36 = 144,$$

$$x = \frac{18 \pm 12}{5}, \quad x_1 = 6, \quad x_2 = 1{,}2.$$

Так как при $x = 6$ и $x = 1{,}2$ значения выражений $x + 2$ и $x + 18$ отличны от нуля, то числа 6 и 1,2 являются корнями дробно-рационального уравнения (1). Однако число 1,2 не удовлетворяет условию задачи, так как числитель обыкновенной дроби не может быть дробным числом.

Ответ: $\frac{6}{8}$.

Заметим, что дробь $\frac{3}{4}$, которая получается при сокращении дроби $\frac{6}{8}$, не удовлетворяет условию задачи, так как её знаменатель лишь на 1 больше числителя.

Упражнения

800. Одно число на 6 больше другого. Если большее число разделить на меньшее и к частному прибавить результат от деления учетверённого меньшего числа на большее, то получится 4. Найдите эти числа.

801. Знаменатель обыкновенной дроби на 6 больше её числителя. Если из числителя вычесть 2, а к знаменателю прибавить 2, то дробь уменьшится на $\frac{1}{6}$. Найдите эту дробь.

802. Знаменатель обыкновенной дроби больше её числителя на 3. Если числитель дроби увеличить в 3 раза, а затем уменьшить на 7, а знаменатель увеличить в 2 раза, а затем уменьшить на 11, то получится дробь, обратная данной. Найдите эту дробь.

803. Из посёлка в город, до которого 150 км, выехали одновременно легковой и грузовой автомобили. Скорость легкового автомобиля была на 10 км/ч больше скорости грузового, поэтому он приехал в город на полчаса быстрее, чем грузовой автомобиль. Найдите скорость грузового автомобиля.

804. Мотоциклист проехал от села до озера 60 км. На обратном пути он уменьшил скорость на 10 км/ч, поэтому от озера в село он ехал на 0,3 ч дольше. Сколько времени мотоциклист ехал от озера до села?

805. На 80 км пути велосипедист тратит на 2 ч больше, чем мотоциклист, так как его скорость на 20 км/ч меньше, чем скорость мотоциклиста. Найдите скорость велосипедиста.

806. Первый лыжник прошёл 30 км на $\frac{1}{2}$ ч быстрее, чем второй 45 км, хотя скорость второго была на 3 км/ч больше. За какое время первый лыжник прошёл 30 км?

807. С первого участка собрали 80 ц проса, а со второго 90 ц, хотя площадь второго участка была на 2 га меньше. С каждого гектара второго участка собирали на 5 ц больше, чем с каждого гектара первого. Какова урожайность проса на каждом участке?

808. За 6 ч катер прошёл 36 км по течению реки и 48 км против течения. Какова скорость катера в стоячей воде, если скорость течения 3 км/ч?

809. Плот проплывает 60 км по течению реки на 5 ч быстрее, чем такое же расстояние проходит моторная лодка против течения. Найдите скорость лодки по течению, если её скорость в стоячей воде 10 км/ч.

810. Моторная лодка прошла по течению 70 км. За то же время она может пройти против течения 30 км. Найдите скорость течения, если скорость лодки в стоячей воде 10 км/ч.

811. Две швеи, работая вместе, выполнят полученный заказ за 6 дней. За сколько дней выполнит заказ каждая швея, работая отдельно, если одной из них для этого потребуется на 5 дней больше, чем другой?

812. Два слесаря выполнили задание за 12 ч. Если бы половину задания выполнил первый, а оставшуюся часть второй, то первому потребовалось бы времени на 5 ч больше, чем второму. За сколько часов каждый из них мог бы выполнить задание?

813. Первой ткачихе для выполнения половины заказа потребуется на 2 дня больше, чем второй для выполнения всего заказа. Вместе они выполнят заказ на 1 день раньше, чем вторая ткачиха, работая отдельно. За сколько дней каждая ткачиха, работая отдельно, может выполнить этот заказ?

814. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода. Они встретились в 10 ч, причём пешеход, вышедший из пункта A, прошёл до встречи на 2 км больше. Продолжая свой путь, он пришёл в пункт B в 10 ч 40 мин. Второй пешеход пришёл в пункт A в 11 ч 30 мин. Найдите расстояние от пункта A до пункта B.

815. Из сосуда, заполненного спиртом, отлили 6 л. Затем долили в него столько же литров воды и опять отлили 5 л смеси. В сосуде осталась смесь, содержащая 80 % спирта. Найдите вместимость сосуда.

816. Пройдя половину пути, поезд увеличил скорость на 30 км/ч. С какой скоростью прошёл поезд первую половину пути, если его средняя скорость на всём пути оказалась равной 72 км/ч?

817. Из одного пункта по шоссе в северном направлении вышли два автомобиля. Скорость первого автомобиля — 80 км/ч, а скорость второго — 100 км/ч. Через 1 ч из того же пункта в том же направлении вышел третий автомобиль. После того как он догнал первый автомобиль, ему понадобилось ещё 3 ч, чтобы догнать второй. Какова скорость третьего автомобиля?

818. В раствор, содержащий 40 г соли, добавили 100 г воды. В результате этого концентрация соли уменьшилась на 2 %. Найдите первоначальную массу раствора.

819. Колонна машин движется по дороге со скоростью 40 км/ч. Посыльный выехал из конца колонны в её начало, передал план дальнейшего движения и возвратился обратно. На весь путь он затратил 1 ч 12 мин. Найдите скорость посыльного, если длина колонны 20 км.

820. Из одного пункта выехали одновременно в одном и том же направлении два автомобиля. Первый автомобиль двигался со скоростью 60 км/ч, а второй — со скоростью 80 км/ч. Через полчаса из того же пункта вслед за ними выехал третий автомобиль. Он догнал второй автомобиль через $1\frac{1}{4}$ ч после того, как догнал первый. Найдите скорость третьего автомобиля.

821. Вниз по реке от пристани P отправились одновременно катер и плот. Катер прошёл 48 км и вернулся обратно через 7 ч. По пути он встретил плот на расстоянии 12 км от пристани P. Какова скорость течения и скорость катера в стоячей воде?

Упражнения для повторения

822. Разложите на множители:

а) $x^2 - x - 110$;

б) $3x^2 + 10x + 3$;

в) $2m^2 - 5m - 12$;

г) $6y^2 - y - 2$.

823. Составьте квадратное уравнение, имеющее корни:

а) $5-\sqrt{7}$ и $5+\sqrt{7}$;

б) $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$.

824. Принадлежат ли графику функции $y = 2x^2 - 4x + 5$ точки

$$A(-1{,}5;\ 15{,}3),\quad B(0{,}5;\ 3{,}5)\quad \text{и}\quad C(1{,}5;\ 6{,}5)?$$

825. Докажите, что верно равенство:

а) $\frac{1}{2\sqrt{20}-9}-\frac{1}{2\sqrt{20}+9}=-18$;

б) $\frac{7+3\sqrt{5}}{7-3\sqrt{5}}+\frac{7-3\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}=47$.

? Контрольные вопросы и задания

1. Приведите пример целого уравнения и пример дробно-рационального уравнения.

2. При решении дробно-рационального уравнения его свели к квадратному уравнению, имеющему корни -5 и 7. В каком случае эти числа являются корнями дробно-рационального уравнения?

Дополнительные упражнения к главе 4

К параграфу 9

826. Решите уравнение:

а) $m^2 - 2\frac{1}{4} = 0$; в) $-0{,}1x^2 + 10 = 0$;

б) $m^2 + \frac{1}{9} = 0$; г) $6 - 1{,}2y^2 = 0$.

827. Решите уравнение:

а) $2x^2 - 3x = 0$; в) $2x^2 = 3x$;

б) $\frac{1}{3}x - 4x^2 = 0$; г) $x^2 = -5x$.

828. Решите уравнение:

а) $5x^2 = 40x$; в) $3x^2 = 27$;

б) $\frac{25}{9}x^2 = 100$; г) $3x^2 = \sqrt{36x^2}$.

Замечание. Уравнения а) и б) этого упражнения были составлены среднеазиатским учёным Мухаммедом ал-Хорезми (783 — около 850); в) — преподавателем Венского университета Генрихом Шрейбером (ум. в 1525); г) — немецким математиком Адамом Ризе (1492—1559).

829. Найдите корни уравнения:

а) $(2x - 1)^2 - (x - 2)^2 = 0$;

б) $(3x + 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$;

в) $(2a^2 - 3)^2 - (2a^2 + 1)^2 + 1 = 0$;

г) $(m + 4)(m^2 - 4m + 16) - m(m + 1)(m - 1) = m^2 + m$.

830. Решите относительно x уравнение:

а) $x^2 = a$; в) $x^2 = a^2$; д) $2x^2 - 3xa = 0$;

б) $x^2 = -a$; г) $x^2 = -a^2$; е) $x^2 - 9a = 0$.

831. Решите уравнение с помощью выделения квадрата суммы или квадрата разности:

а) $x^2 + 6x - 16 = 0$; в) $4x^2 - 12x + 5 = 0$;

б) $x^2 - 4x - 12 = 0$; г) $9x^2 + 12x - 5 = 0$.

832. Найдите корни уравнения:

а) $6x^2 - 7x + 2 = 0$;
б) $8x^2 + 10x - 3 = 0$;
в) $9x^2 - 12x + 4 = 0$;
г) $20x^2 + 16x + 3 = 0$;
д) $x^2 - 2x - 2 = 0$;
е) $4x^2 - 4x - 7 = 0$;
ж) $x^2 + 6x + 4 = 0$;
з) $x^2 + 2x - 11 = 0$.

833. Решите уравнение:

а) $2y^2 - 5y + 1 = 34$;
б) $-3m^2 + 7m + 24 = -2$;
в) $\frac{1}{2}n^2 - 6n + 10 = -6$;
г) $2(x - 3)^2 + 30x = -3x - 1$;
д) $(3k - 1)(3k + 1) = (2k + 3)^2 - 14$;
е) $3(2x + 1)^2 = (6 - x)(x + 6) - 32$.

834. При каких значениях переменной верно равенство:

а) $(2x - 1)^2 = -2x + 1$;
б) $(3x + 2)^2 = -3x - 2$;
в) $(3x - 1)^2 = -3x - 1$;
г) $(3x + 1)^2 = -3x + 1$?

835. Найдите значения переменной, при которых равны значения выражений:

а) $4x^2 - 5x + 3$ и $2x^2 - 3x + 27$;
б) $-3m^2 + 4m + 1$ и $-5m^2 + 6m + 1$;
в) $3p^2 - 10p + 4$ и $-2p^2 + 7p - 2$;
г) $-5x^2 - 2x - 3$ и $3x^2 + 30x + 21$.

836. Решите уравнение:

а) $10x = x^2 + 21$;
б) $x^2 = 12x + 288$;
в) $x^2 + 10x = 39$;
г) $3x^2 + 12 = 12x$;
д) $3x^2 + 12 = 30x$;
е) $3x^2 + 12 = 9x$;
ж) $144 + x^2 = 36x$;
з) $x^2 = 12x - 36$.

Замечание. Уравнения а) и б) этого упражнения были составлены среднеазиатским учёным Мухаммедом ал-Хорезми (783 — около 850); в) — персидским учёным Омаром Хайямом (1048—1122); г) — ж) — французским математиком Никола Шюке (ум. 1500); з) — немецким математиком Михаэлем Штифелем (1487—1567).

837. Составьте биквадратное уравнение с целыми коэффициентами, зная, что один из его корней равен $\sqrt{5}$, а второй равен $\sqrt{2}$.

838. Решите уравнение:

а) $(x^2 + 6x)^2 - 4(x^2 + 6x + 1) - 17 = 0$;

б) $(x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x - 4) = -6$;

в) $x(x - 2)(x - 3)(x - 5) = 72$;

г) $(x + 2)(x - 3)(x - 6)(x - 1) = -56$.

839. Найдите корни уравнения:

а) $x^4(x + 1)^4 - 40x^2(x + 1)^2 + 144 = 0$;

б) $\frac{(x+3)^4}{x^4} - \frac{61(x+3)^2}{x^2} + 900 = 0$.

840. Решите уравнение $3x + 4\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 + 4$, используя введение новой переменной.

Замечание. Уравнение взято из книги «Практика геометрии» (1220) итальянского математика Леонардо Фибоначчи.

841. Докажите, что один из корней каждого из квадратных уравнений $ax^2 - (a + c)x + c = 0$ и $ax^2 + bx - (a + b) = 0$ равен 1.

842. Докажите, что если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни, то они обратны корням квадратного уравнения $cx^2 + bx + a = 0$.

843. Разность кубов двух последовательных целых чисел равна 217. Найдите эти числа.

844. Найдите три последовательных чётных натуральных числа, квадрат большего из которых равен сумме квадратов двух других чисел.

845. Длины (в см) трёх рёбер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, выражаются тремя последовательными натуральными числами. Площадь поверхности этого прямоугольного параллелепипеда равна 724 см^2. Найдите длины его рёбер.

846. Белый прямоугольник, длина которого 9 см и ширина 6 см, наклеен на зелёный так, что образовалась зелёная рамка одной и той же ширины. Найдите ширину рамки, если площадь зелёного прямоугольника 130 см^2.

847. Из квадратного листа картона изготовили открытую коробку, вырезав по углам квадраты со стороной 5 см. Найдите сторону квадратного листа, если объём коробки 845 см^3.

848. За весь сезон в футбольной лиге было сыграно 132 матча. Каждая команда сыграла с каждой один раз на своём поле и один раз на чужом. Сколько команд было в лиге?

849. Несколько волейбольных команд организовали турнир, на котором было проведено 15 игр. По условию турнира каждая команда играла с каждой один раз. Сколько команд участвовало в турнире?

К параграфу 10

850. При каком значении c один из корней квадратного уравнения $4x^2 - 5x + c = 0$:

а) на $1\frac{3}{4}$ больше другого;

б) в 4 раза больше другого?

851. Найдите свободный член квадратного уравнения $5x^2 - 3x + k = 0$, корни которого x_1 и x_2, если:

а) $2x_1 - 5x_2 = 11$;

б) $-x_1 + 2x_2 = 4{,}2$;

в) $5x_1 = 5x_2 - 1$;

г) $2x_1 - 3 = -5x_2$.

852. Найдите значение коэффициентов b и c квадратного уравнения $-2x^2 + bx + c = 0$, если:

а) один из его корней равен 3, а другой — свободному члену c;

б) один из его корней равен -2, а другой — коэффициенту b.

853. Используя квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, выразите через p и q:

а) сумму чисел, обратных его корням;

б) сумму квадратов его корней;

в) квадрат разности его корней;

г) сумму кубов его корней.

854. Докажите, что при любом значении a уравнение $7x^2 + 10x + a^2 + 1 = 0$ не имеет положительных корней.

855. Докажите, что при любом значении b уравнение $3x^2 + bx - 7 = 0$ имеет один положительный и один отрицательный корень.

856. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $6x^2 - 8{,}4x + 2{,}7$;

б) $-4{,}4x^2 + 8{,}7x + 0{,}2$;

в) $2x^2 - 3x\sqrt{3} + 3$;

г) $4x^2 - x\sqrt{5} - 25$.

857. Сократите дробь:

а) $\frac{2m^2+3m-9}{4m^2-12m+9}$; б) $\frac{c^2+2c-8}{c^2+3c-4}$; в) $\frac{x^2-4x-5}{x^3y+y}$.

858. Упростите выражение:

а) $-\frac{4x+18}{x^2-x-6}+\frac{x+3}{x-3}$; б) $\frac{m-8}{m+2}:\frac{m^2-7m-8}{m^2-4}-1$.

859. Решите уравнение:

а) $4x^4-37x^2+9=0$; б) $9x^4-37x^2+4=0$.

860. Разложите на множители многочлен:

а) x^4+17x^2+16; в) $4x^4-17x^2+4$;

б) x^4+2x^2-24; г) $9x^4-26x^2-3$.

861. При каких значениях m не имеет корней уравнение:

а) $2x^4+4x^2+m=0$;

б) $3x^4-mx^2+3=0$?

К параграфу 11

862. Решите уравнение:

а) $\frac{5}{x^2-4}+\frac{x}{x-2}=\frac{20}{x+2}$; в) $\frac{8}{x^2-3x-10}+\frac{x+10}{x+2}=\frac{3}{x-5}$;

б) $\frac{8}{x^2-3x}-\frac{x-2}{x}=\frac{4}{x-3}$; г) $\frac{1}{x-4}=\frac{6}{x^2-3x-4}-\frac{x-5}{x+1}$.

863. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{7m+9}{2m^2-4m}+\frac{3m+1}{m^2-4}=\frac{8m+3}{3m^2-6m}$; д) $\frac{5m+4}{m^3-8}-\frac{2}{m-2}=\frac{2-7m}{m^2+2m+4}$;

б) $\frac{5x+4}{2x^2+9x}-\frac{6-7x}{x^2-3x}=\frac{3x+1}{9-x^2}$; е) $\frac{3-2n}{n^2-n+1}+\frac{1-2n^2}{n^3+1}=-\frac{2}{n+1}$;

в) $\frac{4p+5}{4p^2-1}+\frac{p+1}{p-2p^2}=\frac{3p}{2p^2+p}$; ж) $\frac{x+6}{1+2x+4x^2}+\frac{2}{2x-1}=\frac{8x^2-1}{1-8x^3}$;

г) $-\frac{7x-3}{2x-3x^2}-\frac{4x-1}{9x^2-4}=-\frac{2x+1}{2x+3x^2}$; з) $\frac{4}{3m+1}+\frac{3m-7}{27m^3+1}=\frac{1-6m}{1-3m+9m^2}$.

864. При каком значении переменной x сумма дробей $\frac{x+2}{x-1}$ и $\frac{x+1}{x-2}$ равна их произведению?

865. Решите уравнение $\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=25.$

Замечание. Уравнение немецкого математика и астронома Региомонтана (1436—1476).

866. Дана обыкновенная дробь, знаменатель которой на 1 меньше утроенного числителя. Если из неё вычесть другую дробь, числитель которой на 2 меньше числителя, а знаменатель на 4 меньше знаменателя данной дроби, то получится $\frac{1}{8}$. Найдите данную дробь.

867. Сумма числителя и знаменателя первой обыкновенной дроби равна 10, а второй 18. Числитель второй дроби в 3 раза больше числителя первой. Произведение дробей равно $1\frac{1}{3}$. Найдите эти дроби.

868. Разность между знаменателем и числителем первой обыкновенной дроби равна 4, а второй 7. Знаменатель первой дроби в 2 раза меньше знаменателя второй. При делении первой дроби на вторую получается $\frac{4}{5}$. Найдите эти дроби.

869. Отправление поезда из города до станции, удалённой от него на 150 км, было задержано на 30 мин. С какой скоростью должен был идти поезд по расписанию, если, увеличив скорость на 10 км/ч, он прибыл в пункт назначения без опоздания?

870. Поезд должен был пройти 400 км. Когда он прошёл четверть пути, его задержали на 2,5 ч. Чтобы прийти вовремя, поезд увеличил скорость на 20 км/ч. Сколько времени, считая задержку, поезд был в пути?

871. Фермер отправился на машине в село, расположенное на расстоянии 60 км от его фермы. Первую четверть пути он проехал на 5 км/ч медленнее, чем предполагал. На оставшемся пути он увеличил скорость на 15 км/ч и на весь путь потратил 1 ч 5 мин. С какой скоростью предполагал ехать фермер?

872. Первый велосипедист проехал 36 км, второй 33 км, а третий 35 км. Скорость второго велосипедиста была на 3 км/ч меньше скорости первого и на 1 км/ч больше скорости третьего. Третий велосипедист затратил времени на полчаса больше, чем первый. Сколько времени затратил каждый велосипедист?

873. Автомобиль проехал расстояние от села до города за 5 ч. В обратный путь он отправился с той же скоростью. Однако, проехав 50 км, он снизил скорость на 10 км/ч и поэтому на обратный путь затратил на 1 ч больше. Найдите расстояние от села до города.

874. Из двух городов, расстояние между которыми 310 км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Пройдя 100 км, первый автомобиль увеличил скорость на 20 км/ч и прибыл во второй город в то же время, в которое второй автомобиль прибыл в первый. Второй автомобиль ехал всё время с постоянной скоростью, которая была на 12 км/ч больше, чем скорость первого автомобиля в начале пути. Найдите скорость первого автомобиля в начале пути.

875. Три автомобиля перевозят грузы между двумя городами, расстояние между которыми 600 км. Первый автомобиль тратит на весь путь на 2,5 ч меньше, чем второй, а третий — на 5 ч больше, чем второй. Найдите скорость второго автомобиля, если скорость первого на 40 км/ч больше скорости третьего.

876. Катер прошёл 115 км по течению реки и 170 км против течения. На путь против течения он потратил на 5 ч больше, чем на путь по течению. Найдите скорость течения, если скорость катера в стоячей воде 20 км/ч.

877. Лесорубы отправили по течению реки плот. За ним следом через 5,6 ч отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 36 км. С какой скоростью плыл плот, если моторная лодка шла быстрее плота на 10,5 км/ч?

878. От пристани вниз по реке отправлен плот, который должен был пройти до лесопильного завода 54 км. Плот был в пути 4 ч, когда навстречу ему от лесопильного завода вышел катер, скорость которого в стоячей воде 21 км/ч. Катер встретил плот на расстоянии 36 км от завода. Найдите скорость плота.

879. Туристы взяли напрокат лодку. За 3 ч они поднялись вверх по реке на 12 км и вернулись обратно. Какова скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения 2 км/ч?

880. Расстояние от пристани A до пристани B, расположенной выше по течению реки, катер пройдёт за 11,5 ч. Если он не дойдёт 100 км до пристани B и возвратится обратно, то времени затратит столько же, сколько тратит на путь от пристани A до пристани B. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения 3 км/ч.

881. Поставили два забора из стандартных секций. Длина каждого забора 63 м. Для первого забора использовали на 3 секции меньше, чем для второго, так как ширина каждой секции первого забора была на 0,5 м больше ширины секции второго забора. Найдите ширину секций, из которых собран каждый забор.

882. Окружность переднего колеса специального велосипеда меньше окружности заднего колеса на 0,6 м. Проезжая 36 м, переднее колесо делает на 5 оборотов больше, чем заднее. Найдите длину окружности каждого колеса.

883. Два маляра могут покрасить стены за 12 ч. Сначала приступил к работе один маляр, и, когда он выполнил половину работы, его сменил второй. Вся работа была выполнена за 25 ч. За сколько часов каждый маляр может один выполнить всю работу?

884. Два фермера вырыли колодец за 24 ч. Сколько часов пришлось бы работать каждому фермеру отдельно, если известно, что на выполнение всей работы одному из них потребовалось бы времени на 20 ч больше, чем другому?

885. Два автомата могут выполнить работу за 6 дней. За сколько дней каждый автомат отдельно выполнит всю работу, если одному из них потребуется для этого на 5 дней больше?

886. За 16 дней двумя экскаваторами можно вырыть $\frac{4}{9}$ траншеи для прокладки труб. За сколько дней выполнил бы эту работу каждый экскаватор, если одному понадобится для этого на 30 дней больше, чем другому?

887. Через две трубы половина бассейна наполнится за 2 ч. За сколько часов каждая труба наполнит бассейн, если одной потребуется на 6 ч больше, чем другой?

888. Две трубы наполнят бассейн на 16 ч быстрее, чем одна первая труба, и на 25 ч быстрее, чем одна вторая труба. За сколько часов обе трубы наполнят бассейн?

889. Первый теплоход вышел из порта A в порт B на сутки раньше второго теплохода, а пришёл в порт B на сутки позже, так как вторую половину пути он шёл медленнее на 10 км/ч, чем первую. Сколько суток шёл второй теплоход в порт B, если, увеличив скорость на 10 км/ч, весь обратный путь он проделал за 6 суток? (Скорость первого и второго теплоходов в момент выхода из порта A одинакова.)

890. В некоторый момент времени часы показывают на 2 мин меньше, хотя и идут быстрее, чем нужно. Если бы они показывали на 3 мин меньше, но спешили бы в сутки на полминуты больше, чем сейчас, то верное время они показали бы на сутки раньше, чем покажут. На сколько минут в сутки спешат эти часы?

Глава 5 Неравенства

В этой главе начинается изложение материала, посвящённого числовым неравенствам и неравенствам с переменной. Здесь рассматриваются способы доказательства неравенств, свойства неравенств, позволяющие решать неравенства и их системы. Особое внимание уделяется способам решения неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

§ 12. Числовые неравенства и неравенства с переменными

37. Сравнение чисел

В науке и практической деятельности людям часто приходится сравнивать два каких-либо числа. Для любых чисел a и b выполняется одно и только одно из соотношений: a равно b, a меньше b, a больше b. Результат сравнения чисел записывают в виде числовых равенств или числовых неравенств, используя знаки =, <, >.

Вам известно, как сравнить два натуральных числа, две обыкновенные дроби, две десятичные дроби, два отрицательных числа и т. п. В некоторых случаях для сравнения чисел используют специальные приёмы. Приведём примеры.

Пример 1. Сравним числа:

а) $\frac{8}{9}$ и $\frac{120}{121}$; б) 0,47 и $\frac{4}{7}$; в) $-\frac{5}{36}$ и $-\frac{5}{123}$.

а) Для сравнения дробей заметим, что первая дробь меньше единицы на $\frac{1}{9}$, а вторая — только на $\frac{1}{121}$. Значит, $\frac{8}{9}<\frac{120}{121}$.

б) Первая дробь меньше $\frac{1}{2}$, а вторая больше $\frac{1}{2}$, так как её числитель больше половины знаменателя. Следовательно, $0{,}47 < \frac{4}{7}$.

в) Сравним модули данных чисел, т. е. дроби $\frac{5}{36}$ и $\frac{5}{123}$. Первая из них больше, так как числители дробей равны, а знаменатель первой дроби меньше. По правилу сравнения отрицательных чисел получаем, что $-\frac{5}{36} < -\frac{5}{123}$.

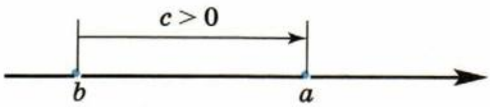


Рис. 39

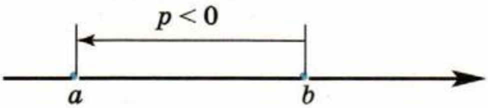


Рис. 40

Удобно, однако, иметь способ сравнения, не зависящий от конкретного вида числа. Этот способ связан с изображением чисел на координатной прямой. Пусть a и b — действительные числа и $a > b$. Тогда число a изображается на координатной прямой точкой, лежащей правее точки, изображающей число b. Это означает, что $a = b + c$, где c — положительное число, так как передвижение по координатной прямой вправо соответствует прибавлению положительного числа (рис. 39). Отсюда по определению разности получим, что $a - b = c$, где c — положительное число. Аналогично можно показать, что если $a < b$, то $a - b = p$, где p — отрицательное число (рис. 40). Проведённые рассуждения служат основанием для принятия следующего определения.

Определение. **Число a больше числа b, если разность $a - b$ — положительное число; число a меньше числа b, если разность $a - b$ — отрицательное число; число a равно числу b, если разность $a - b$ равна нулю.**

Пример 2. Сравним числа a и b, если:

а) $a - b = (-2{,}7)^3$; б) $a - b = (-1)^{6n}$, где $n \in N$; в) $a - b = 3^7 + (-3)^7$.

Имеем:

а) $a < b$, так как $(-2{,}7)^3 < 0$;

б) $a > b$, так как $(-1)^{6n} > 0$, где $n \in N$;

в) $a = b$, так как $3^7 + (-3)^7 = 0$.

Упражнения

891. Сравните числа:

а) $\frac{38}{39}$ и $\frac{11}{12}$; в) $-\frac{6}{19}$ и $-\frac{6}{29}$; д) 17,2(7) и 17,27;

б) $\frac{5}{7}$ и $\frac{4}{9}$; г) 3,12 и $3\frac{1}{8}$; е) $-5\frac{1}{3}$ и $-5{,}(3)$.

892. Замените звёздочку какой-либо цифрой так, чтобы получилось верное двойное неравенство:

а) $5{,}617 < 5{,}6{*}8 < 5{,}641$; в) $-16{,}07 > -16{,}{*}4 > -16{,}15$;

б) $\frac{1}{9} < \frac{*}{6} < \frac{17}{18}$; г) $\frac{1}{3} < \frac{*}{6} < \frac{7}{8}$.

893. Расположите в порядке возрастания числа

$$-1\frac{1}{3};\quad -1{,}2;\quad 1{,}14;\quad 1\frac{1}{8};\quad -1{,}5;\quad 1{,}0(2).$$

894. Расположите в порядке убывания числа

$$-0{,}55;\quad -\frac{1}{3};\quad \frac{1}{6};\quad 0{,}16;\quad -\frac{1}{7};\quad 0{,}1(7).$$

895. Укажите все дроби вида $\frac{5}{n}$, где $n \in N$, заключённые между числами:

а) $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; в) 0,4 и 0,5.

896. Сравните значения выражений:

а) $47{,}5^2 - 42{,}5^2$ и 90; в) $67\frac{1}{3} \cdot 64\frac{2}{3}$ и 66^2;

б) $\frac{6{,}7^3 + 1{,}7^3}{8{,}4}$ и $6{,}7^2 + 1{,}7^2$; г) $\frac{3{,}9^5 - 1{,}9^5}{2}$ и $3{,}9^4 + 1{,}9^4$.

897. В 12 ч 15 мин из посёлка вышел турист и направился на станцию со скоростью 4,5 км/ч. Спустя 30 мин навстречу ему со станции вышел другой турист, который шёл со скоростью 5 км/ч и в 13 ч 45 мин встретился с первым. Место встречи расположено ближе к посёлку или к станции?

898. Вкладчик решил положить 300 000 р. на полгода в один из двух близлежащих банков. Первый банк выплачивает доход из расчёта 7 % за каждые полгода, а второй ежемесячно даёт доход в 1 %, причём проценты начисляются со всей накопленной суммы. В какой из банков вкладчику выгоднее положить деньги?

899. Два вкладчика решили положить в банк на три месяца по 500 000 р. Первый вкладчик положил деньги в банк, выплачивающий доход из расчёта 4 % ежеквартально (т. е. через 3 месяца). Второй положил деньги в банк, который ежемесячно выплачивает по 1,25 % с учётом всей накопленной суммы. Кто из вкладчиков получит больше денег?

900. Сравните числа x и y, если:

а) $x - y = (-2{,}7)^{18}$; б) $x - y = (-1{,}116)^9$.

901. Известно, что $a < b$. Может ли разность $a - b$ выражаться числом:

а) $-8{,}01$; б) $(-6{,}4)^5$; в) $|-3{,}3|$; г) $(-2)^{36}$?

902. Докажите, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a, b, c, d — положительные числа, причём a — наибольшее из них, то $a + d > b + c$.

Замечание. Это свойство было доказано в V книге «Начал» Евклида.

Упражнения для повторения

903. Определяя массу груза a с точностью до 1 кг, получили, что она равна 56 кг. Может ли масса этого груза, измеренная с точностью до 0,1 кг, быть равной:

а) 56,4 кг; б) 54,9 кг; в) 56,1 кг; г) 57,2 кг?

904. Укажите наименьшее и наибольшее целые числа, принадлежащие промежутку:

а) $\left(-3{,}5;\ 2\frac{1}{2}\right)$; в) $\left(-12;\ \sqrt{35}\right)$;

б) $[-4;\ 8)$; г) $\left[-\sqrt{7};\ \sqrt{5}+2\right]$.

905. Найдите значение выражения:

а) $\frac{27\cdot729}{9^4}$; б) $\frac{3^6}{81\cdot243}$.

38. Свойства числовых неравенств

Рассмотрим некоторые свойства числовых неравенств.

Теорема 1. Если $a < b$, то $b > a$; если $a > b$, то $b < a$.

Доказательство. Если $a < b$, то по определению разность $a - b$ является отрицательным числом. Тогда противоположное ему число $b - a$ — положительное, а это означает, что $b > a$.

Аналогично доказывается, что если $a > b$, то $b < a$.

Теорема 2. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Доказательство. По условию $a < b$ и $b < c$. Отсюда по определению каждая из разностей $a - b$ и $b - c$ является отрицательным числом. Рассмотрим разность $a - c$. Прибавляя b и вычитая b, получим:

$$a - c = a - c + b - b = (a - b) + (b - c).$$

Сумма двух отрицательных чисел есть число отрицательное. Значит, разность $a - c$ — отрицательное число и по определению $a < c$.

Аналогично можно доказать, что если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Доказанное свойство отношения «меньше—больше» называется свойством транзитивности (от латинского слова *transitus* — переход, прохождение). Можно привести другие примеры отношений, обладающих свойством транзитивности, например: отношение делимости между целыми числами (если a делится на b и b делится на c, то a делится на c), отношение параллельности между различными прямыми (если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$).

Теорема 3. Если $a < b$ и c — любое число, то $a + c < b + c$.

Доказательство. Так как $a < b$, то разность $a - b$ является отрицательным числом. Рассмотрим разность $(a + c) - (b + c)$. Выполняя тождественные преобразования, получим:

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b.$$

Значит, разность $(a + c) - (b + c)$ является отрицательным числом и по определению $a + c < b + c$.

Таким образом, мы доказали свойство неравенств:

если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство.

Теорема 4. Если $a < b$ и c — положительное число, то $ac < bc$; если $a < b$ и c — отрицательное число, то $ac > bc$.

Доказательство. Рассмотрим разность $ac - bc$. Преобразуем её:

$$ac - bc = c(a - b).$$

Если $a < b$, то разность $a - b$ является отрицательным числом. При положительном c произведение $c(a - b)$ отрицательно, а при отрицательном c это произведение положительно. Это означает по определению, что если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$, а если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$.

Так как деление можно заменить умножением на число, обратное делителю, то аналогичное свойство справедливо и для деления.

Итак, доказано следующее свойство неравенств:

если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство;

если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.

Следствие. Если a и b — положительные числа и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Доказательство. Разделив обе части неравенства $a < b$ на положительное число ab, получим, что $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$, т. е. $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Теорема 5. Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

Доказательство. По определению каждая из разностей $a - b$ и $c - d$ является отрицательным числом. Рассмотрим разность $(a + c) - (b + d)$. Преобразовав её, получим:

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d =$$
$$= (a - b) + (c - d).$$

Сумма двух отрицательных чисел является отрицательным числом. Значит, по определению $a + c < b + d$.

Теорема справедлива и в случае почленного сложения трёх и более неравенств.

Доказанная теорема выражает ещё одно свойство неравенств:

если сложить почленно верные неравенства одного знака, то получится верное неравенство.

Теорема 6. Если $a < b$ и $c < d$, причём a, b, c и d — положительные числа, то $ac < bd$.

Доказательство. По определению каждая из разностей $a - b$ и $c - d$ является отрицательным числом. Рассмотрим разность $ac - bd$. Выполняя преобразования, получим:

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd =$$
$$= c(a - b) + b(c - d).$$

Каждое из слагаемых $c(a - b)$ и $b(c - d)$, а значит, и их сумма отрицательны. Отсюда получаем, что разность $ac - bd$ является отрицательным числом, и по определению $ac < bd$.

Теорема справедлива и для почленного умножения трёх и более неравенств указанного вида.

Таким образом, доказано следующее свойство:

если перемножить почленно верные неравенства одного знака, в которых левые и правые части являются положительными числами, то получится верное неравенство.

Следствие. Если a и b — положительные числа и $a < b$, то

$$a^n < b^n,$$

где $n \in N$.

Доказательство. Перемножая почленно n верных неравенств $a < b$, где a и b — положительные числа, получим верное неравенство

$$a^n < b^n.$$

Упражнения

906. На координатной прямой изображены числа a и b (рис. 41). Изобразите на координатной прямой и сравните числа:

а) $2a$ и $2b$;

б) $-a$ и $-b$.

Рис. 41

907. Зная, что $a < b$, сравните числа:

а) $a - 1$ и $b + 6$;
б) $a - 14$ и $b + 1$;
в) $b + 5$ и $a - 8$;
г) $a + 2$ и $b - 6$.

908. Зная, что $a < b$, поставьте вместо многоточия знак < или > так, чтобы получилось верное неравенство:

а) $-3a \dots -3b$;
б) $\frac{a-4}{4,5} \dots \frac{b-4}{4,5}$;
в) $5a - 17,6 \dots 5b - 17,6$;
г) $-\frac{a+2}{8} \dots -\frac{b+2}{8}$.

909. Зная, что $a < b$, сравните:

а) $5a$ и $5b + 1$;
б) $3a - 6$ и $3b$;
в) $-a + 8$ и $-b + 7$;
г) $5b + 2$ и $5a - 3$.

910. Выясните, является ли число a положительным или отрицательным, если известно, что:

а) $15a > 6a$;
б) $5a < 7a$;
в) $-3a + 7 > -a + 7$;
г) $-6a + 1 < -5a + 1$.

911. Известно, что $a < b$. Является ли верным неравенство:

а) $a + 6 < b + 12$;
б) $a - 4 < b - 1$;
в) $3a < 3b + 1$;
г) $-2a > -2b$?

912. Докажите, что если $a > b > 0$, то:

а) $26a > 12b$;

б) $-1,3a < -1,2b$.

913. Верно ли, что:

а) если $a > 2$, то $a^2 > 2a$;
б) если $a < 2$, то $a^2 < 2a$;
в) если $a > -5$, то $a^2 > -5a$;
г) если $a < -5$, то $a^2 < -5a$?

914. Известно, что $a > b$, $d < b$, $c > a$, причём a, b, c и d — положительные числа. Расположите в порядке возрастания числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ и $\frac{1}{d}$.

915. Выполните почленное сложение неравенств:

а) $8 > -1$ и $1{,}5 > 1{,}3$; б) $-2{,}4 < -2{,}1$ и $0{,}6 < 1{,}3$.

916. Выполните почленное умножение неравенств:

а) $15 > 12$ и $0{,}3 > 0{,}2$; б) $\frac{1}{16} < \frac{1}{12}$ и $4 < 6$.

917. Известно, что $a < b$, причём a и b — положительные числа. Сравните:

а) a^3 и b^3; б) $-1{,}5a^5$ и $-1{,}5b^5$; в) $-a^7 - 3$ и $-b^7 - 3$.

918. Докажите, что в любом выпуклом четырёхугольнике:

а) диагональ меньше полупериметра;

б) сумма расстояний от точки, взятой внутри четырёхугольника, до его вершин больше полупериметра;

в) сумма одной пары противоположных сторон меньше суммы диагоналей.

919. Докажите, что в любом треугольнике сумма одной из сторон и высоты, опущенной на эту сторону, больше полупериметра.

Упражнения для повторения

920. При некоторых значениях x и y значение дроби $\frac{x - 3y}{y}$ равно 0,7. Чему равно при тех же значениях x и y значение дроби $\frac{2y^2 - 5x^2}{x^2}$?

921. Замените звёздочку, если возможно, цифрой так, чтобы было верным утверждение:

а) число 76*4 кратно 18;

б) число 12 является делителем числа 83*4.

922. Докажите равенство

$$\frac{\sqrt{9} + \sqrt{54} + \sqrt{450} + \sqrt{75}}{5 + \sqrt{3}} = 3\sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Замечание. Задача индийского математика и астронома XII в. Бхаскары.

923. Найдите корни уравнения:

а) $x^2 + 2x - 1 = 0$; в) $3x^2 - 2x - 1 = 0$;

б) $2x^2 - 6x + 3 = 0$; г) $3x^2 + 3x - 1 = 0$.

39. Оценка значений выражений

Рассмотренные свойства неравенств позволяют оценить значение выражения с переменными, если известно, в каких границах заключены значения переменных.

Приведём примеры.

Пример 1. Зная, что $11{,}5 < a < 11{,}6$, оценим значение выражения $2a + 3{,}2$.

Умножив обе части каждого из неравенств $11{,}5 < a$ и $a < 11{,}6$ на 2, получим, что $23 < 2a$ и $2a < 23{,}2$. Прибавив к обеим частям каждого из полученных неравенств 3,2, найдём, что

$$26{,}2 < 2a + 3{,}2 < 26{,}4.$$

Запись удобно вести в виде цепочки двойных неравенств:

$$11{,}5 < a < 11{,}6;$$
$$23 < 2a < 23{,}2;$$
$$26{,}2 < 2a + 3{,}2 < 26{,}4.$$

Пример 2. Оценим периметр и площадь квадрата со стороной a см, если известно, что $1{,}2 < a < 1{,}3$.

Периметр P (в см) квадрата со стороной a см равен $4a$, а площадь S (в см^2) равна a^2.

Умножим почленно обе части каждого из неравенств $1{,}2 < a$ и $a < 1{,}3$ на 4. Получим:

$$1{,}2 \cdot 4 < 4a < 1{,}3 \cdot 4.$$

Значит,

$$4{,}8 < P < 5{,}2.$$

Выполняя почленно умножение неравенств $1{,}2 < a$ и $1{,}2 < a$, а также $a < 1{,}3$ и $a < 1{,}3$, где $a > 0$, и записывая результат в виде двойного неравенства, получим:

$$1{,}44 < a^2 < 1{,}69,$$

$$\text{т. е. } 1{,}44 < S < 1{,}69.$$

Зная границы, в которых заключены значения переменных x и y, можно, используя свойства неравенств, оценить их сумму, разность, произведение и частное.

Пример 3. Пусть известно, что $1{,}2 < x < 1{,}3$ и $0{,}4 < y < 0{,}5$. Оценим сумму $x + y$, разность $x - y$, произведение xy, частное $\frac{x}{y}$.

Выполняя сначала почленное сложение неравенств $1{,}2 < x$ и $0{,}4 < y$, а затем неравенств $x < 1{,}3$ и $y < 0{,}5$, находим, что $1{,}6 < x + y$ и $x + y < 1{,}8$, т. е.

$$1{,}6 < x + y < 1{,}8.$$

Запись удобно вести короче:

$$\frac{\begin{array}{c}1,2 < x < 1,3\\ 0,4 < y < 0,5\end{array}}{1,6 < x + y < 1,8.}$$

Для того чтобы оценить разность $x - y$, представим её в виде суммы $x + (-y)$. Оценим сначала значение выражения $-y$. Из неравенства $0,4 < y < 0,5$ следует, что $-0,4 > -y > -0,5$, т. е.

$$-0,5 < -y < -0,4.$$

Теперь можно оценить сумму $x + (-y)$, т. е. выражение $x - y$. Имеем:

$$\frac{\begin{array}{c}1,2 < x < 1,3\\ -0,5 < -y < -0,4\end{array}}{0,7 < x - y < 0,9.}$$

Учитывая, что значения переменных x и y заключены между положительными числами и потому являются положительными, мы можем оценить произведение xy, применяя теорему о почленном умножении неравенств сначала к неравенствам $1,2 < x$ и $0,4 < y$, а затем к неравенствам $x < 1,3$ и $y < 0,5$. При этом запись будем вести в виде двойных неравенств:

$$\frac{\begin{array}{c}1,2 < x < 1,3\\ 0,4 < y < 0,5\end{array}}{0,48 < xy < 0,65.}$$

Чтобы оценить частное $\frac{x}{y}$, представим его в виде произведения $x \cdot \frac{1}{y}$. Воспользовавшись следствием о соотношении между числами, обратными некоторым положительным числам, получим, что так как $0,4 < y < 0,5$, то $\frac{1}{0,4} > \frac{1}{y} > \frac{1}{0,5}$, т. е. $2 < \frac{1}{y} < 2,5$. Теперь можно оценить произведение $x \cdot \frac{1}{y}$, т. е. частное $\frac{x}{y}$:

$$\frac{\begin{array}{c}1,2 < x < 1,3\\ 2 < \frac{1}{y} < 2,5\end{array}}{2,4 < \frac{x}{y} < 3,25.}$$

Пример 4. Сравним приращения, которые функция $y = \sqrt{x}$ получает при изменении y от 14 до 15 и от 44 до 45.

Требуется сравнить разности

$$\sqrt{15} - \sqrt{14} \text{ и } \sqrt{45} - \sqrt{44}.$$

Каждую из них представим в виде дроби со знаменателем 1 и освободимся от иррациональности в числителе дроби. Получим:

$$\sqrt{15}-\sqrt{14}=\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{14})(\sqrt{15}+\sqrt{14})}{1\cdot(\sqrt{15}+\sqrt{14})}=$$

$$=\frac{(\sqrt{15})^2-(\sqrt{14})^2}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{14}},$$

$$\sqrt{45}-\sqrt{44}=\frac{(\sqrt{45}-\sqrt{44})(\sqrt{45}+\sqrt{44})}{1\cdot(\sqrt{45}+\sqrt{44})}=$$

$$=\frac{(\sqrt{45})^2-(\sqrt{44})^2}{\sqrt{45}+\sqrt{44}}=\frac{1}{\sqrt{45}+\sqrt{44}}.$$

Так как $\sqrt{15}+\sqrt{14}<\sqrt{45}+\sqrt{44}$, то $\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}>\frac{1}{\sqrt{45}+\sqrt{44}}$, т. е. в первом случае функция получает большее приращение, чем во втором.

Упражнения

924. Зная, что $4{,}2 < x < 4{,}5$, оцените:

а) $-5x$; б) $3x - 8$; в) $6 - x$; г) $\frac{1}{x}+1$; д) $x^2 + 1{,}2$.

925. Зная, что ребро куба равно a см, где $4{,}5 < a < 4{,}6$, оцените объём и площадь поверхности куба.

926. Известно, что $9{,}2 < a < 9{,}3$ и $0{,}2 < b < 0{,}3$. Оцените $a + b$, $a - b$, ab и $\frac{a}{b}$.

927. В треугольнике со сторонами a см, b см и c см, где $2{,}3 \leqslant a \leqslant 2{,}4$, $3{,}2 \leqslant b \leqslant 3{,}3$ и $4{,}5 \leqslant c \leqslant 4{,}6$, соединены середины сторон. Оцените периметр образовавшегося треугольника.

928. Оцените периметр и площадь прямоугольника со сторонами a см и b см, где $5{,}6 \leqslant a \leqslant 5{,}8$; $12{,}1 \leqslant b \leqslant 12{,}2$.

929. Измеряя длину a м и ширину b м садового участка прямоугольной формы, нашли, что $a = 28{,}2 \pm 0{,}1$, $b = 22{,}6 \pm 0{,}1$. Оцените площадь этого участка и длину его изгороди.

930. Фирма хочет снять под офис комнату площадью не менее 50 м^2. Подойдёт ли для этого комната, длина которой a м и ширина b м, если $a = 7{,}7 \pm 0{,}1$, $b = 7{,}2 \pm 0{,}1$?

931. Существует ли треугольник со сторонами a см, b см и c см, если известно, что $4{,}2 \leqslant a \leqslant 4{,}3$, $3{,}6 \leqslant b \leqslant 3{,}8$ и $9{,}1 \leqslant c \leqslant 9{,}2$?

932. Стороны треугольника равны a см, b см, c см. Оцените c, зная, что $2{,}3 \leqslant a \leqslant 2{,}4$, $1{,}8 \leqslant b \leqslant 1{,}9$.

933. Известно, что $12{,}5 < x < 12{,}6$ и $15{,}3 < y < 15{,}6$. Может ли сумма $x + y$ быть равной числу:

а) 27,5; в) 27,85;

б) 28; г) 28,13?

934. Зная, что $3{,}4 < x < 3{,}5$ и $1{,}4 < y < 1{,}5$, оцените значение выражения:

а) $2x + y$; в) $5xy$;

б) $x - 2y$; г) $xy - 2$.

935. Пользуясь тем, что $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ и $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$, оцените:

а) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$; б) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; в) $3\sqrt{10}$.

936. Пользуясь тем, что $2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$ и $3{,}3 < \sqrt{11} < 3{,}4$, оцените:

а) $\sqrt{11} + \sqrt{6}$; б) $\sqrt{11} - \sqrt{6}$; в) $2\sqrt{66}$.

937. Для бега устроена дорожка, ограниченная двумя концентрическими окружностями, радиусы которых равны r см и R см. Зная, что $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, оцените площадь этой дорожки, если $350 < r < 351$ и $570 < R < 571$.

Рис. 42

938. Умывальник имеет форму полуцилиндра (рис. 42), высота которого h см, а радиус основания r см, где $34 < h < 35$ и $10 < r < 11$. Зная, что боковая поверхность цилиндра вычисляется по формуле $S = 2\pi rh$ и $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, оцените, сколько жести израсходовано на изготовление:

а) его задней стенки;

б) его передней стенки;

в) дна и крышки.

939. Сосуд имеет форму цилиндра, высота которого равна h см, а радиус основания r см, где $25 < h < 26$, $15 < r < 16$. Зная, что объём цилиндра вычисляется по формуле $V = \pi r^2 h$ и $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, оцените вместимость сосуда.

940. Докажите, что приращение, которое функция $y = \sqrt{x}$ получает при изменении x от 23 до 25, меньше приращения, которое она получает при изменении x от 13 до 15.

941. Докажите неравенство:

а) $\sqrt{6}+\sqrt{15}>\sqrt{2}+\sqrt{19}$;

б) $\sqrt{5}-\sqrt{2}>2-\sqrt{3}$;

в) $\sqrt{3}+2\sqrt{2}<2+\sqrt{7}$;

г) $\sqrt{5}+\sqrt{2}>\sqrt{6}+1$.

942. Сравните значения выражений:

а) $\sqrt{13}-\sqrt{3}$ и $\sqrt{12}+2$;

б) $\sqrt{17}+\sqrt{7}$ и $3\sqrt{2}+\sqrt{6}$;

в) $5\sqrt{2}+3\sqrt{7}$ и $6\sqrt{5}$;

г) $3\sqrt{5}+7\sqrt{2}$ и $9\sqrt{3}$.

943. Докажите, что сумма медиан треугольника больше его полупериметра, но меньше периметра.

944. Зная, что $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$, оцените:

а) $\frac{4}{\sqrt{2}}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$;

в) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$;

г) $\frac{7}{\sqrt{43-30\sqrt{2}}}$.

Упражнения для повторения

945. При каком натуральном значении q корни уравнения $x^2-6x+q=0$ являются натуральными числами?

946. При каком целом значении q корни уравнения $x^2+8x+q=0$ являются целыми числами?

947. Решите уравнение:

а) $\frac{(4x-1)(x+3{,}5)}{4}-\frac{(2x+1)(x-10{,}5)}{2}=37{,}5$;

б) $\frac{(x+1)(4x-1)}{12}-\frac{(4-x)^2}{3}=15$.

948. Выделите квадрат двучлена из квадратного трёхчлена:

а) $x^2-12x+55$;

б) a^2-3a+7.

949. Найдите пересечение и объединение числовых промежутков:

а) $(-\infty;\ 6)$ и $(-6;\ +\infty)$;

б) $[2;\ +\infty)$ и $[0;\ +\infty)$.

40. Доказательство неравенств

О неравенствах

$$a^2 + 4 > 0, \quad (a - 5)^2 \geqslant 0, \quad -a^2 - 8 < 0$$

можно сразу сказать, что каждое из них верно при любом значении a.

Иначе обстоит дело с неравенством $a^2 - a + 1 > 0$. Нетрудно убедиться, что при значениях a, равных 0; 2; $5\frac{1}{3}$, данное неравенство верно. Чтобы убедиться в том, что оно верно при любом a, преобразуем трёхчлен $a^2 - a + 1$, выделив из него квадрат двучлена:

$$a^2 - a + 1 = a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Выражение $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ при любом a принимает положительное значение. Следовательно, при любом a является верным неравенство $a^2 - a + 1 > 0$.

Выполнив преобразование, мы, как говорят, доказали неравенство. Для доказательства неравенств используют различные приёмы. Один из приёмов состоит в том, что рассматривается разность между левой и правой частями неравенства и доказывается, что при любых значениях переменных эта разность сохраняет знак.

Пример 1. Докажем, что произведение любых двух чисел не превосходит полусуммы их квадратов.

Требуется доказать, что при любых значениях a и b верно неравенство

$$ab \leqslant \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Составим разность левой и правой частей неравенства и преобразуем её:

$$ab - \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{2ab - a^2 - b^2}{2} =$$

$$= \frac{-(a^2 + b^2 - 2ab)}{2} = \frac{-(a - b)^2}{2}.$$

При любых значениях a и b рассматриваемая разность является неположительным числом. Значит, при любых a и b верно неравенство $ab \leqslant \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Заметим, что если в доказанном неравенстве заменить переменные a и b на $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$, то получим $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x + y}{2}$ — *неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим* чисел x и y, доказанное ещё Евклидом в X книге «Начал».

Пример 2. Докажем неравенство

$$x^2 + y^2 > 12x + 18y - 120.$$

Составим разность левой и правой частей неравенств и преобразуем её, выделяя квадраты двучленов:

$$x^2 + y^2 - (12x + 18y - 120) =$$
$$= (x^2 - 12x + 36) + (y^2 - 18y + 81) + 120 - 36 - 81 =$$
$$= (x - 6)^2 + (y - 9)^2 + 3.$$

Так как $(x - 6)^2 \geqslant 0$ при любом x и $(y - 9)^2 \geqslant 0$ при любом y, то выражение $(x - 6)^2 + (y - 9)^2 + 3$ при любых значениях x и y принимает положительные значения. Значит, при любых x и y верно неравенство

$$x^2 + y^2 > 12x + 18y - 120.$$

Пример 3. Докажем, что куб полусуммы любых двух положительных чисел не превосходит полусуммы их кубов.

Пусть a и b — произвольные положительные числа. Требуется доказать, что

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leqslant \frac{a^3+b^3}{2}.$$

Составим разность левой и правой частей неравенства и преобразуем её:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 - \frac{a^3+b^3}{2} =$$

$$= \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 4a^3 - 4b^3}{8} = \frac{3a^2b + 3ab^2 - 3a^3 - 3b^3}{8} =$$

$$= \frac{3a^2(b-a) - 3b^2(b-a)}{8} = \frac{(b-a)(3a^2 - 3b^2)}{8} = -\frac{3(a-b)^2(a+b)}{8}.$$

При $a > 0$, $b > 0$ составленная разность равна отрицательному числу или нулю. Значит, при $a > 0$, $b > 0$ рассматриваемое неравенство верно.

Ещё один приём доказательства неравенств состоит в том, чтобы показать, что данное неравенство следует из некоторых других неравенств, справедливость которых легко устанавливается.

Пример 4. Докажем неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc.$$

Для того чтобы установить, что неравенство верно при любых значениях a, b и c, покажем, что оно следует из очевидных неравенств. В качестве таких очевидных неравенств возьмём неравенства:

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab,$$
$$a^2 + c^2 \geqslant 2ac,$$
$$b^2 + c^2 \geqslant 2bc.$$

Применив к ним теорему о почленном сложении неравенств, получим:

$$a^2 + b^2 + a^2 + c^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2ab + 2ac + 2bc.$$

Отсюда

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geqslant 2ab + 2ac + 2bc, \text{ т. е.}$$
$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc.$$

Неравенство доказано.

Пример 5. Докажем, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9.$$

Преобразуем левую часть неравенства:

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{(a+b+c)(bc+ac+ab)}{abc} =$$

$$= \frac{abc + b^2c + bc^2 + a^2c + abc + ac^2 + a^2b + ab^2 + abc}{abc} =$$

$$= 1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1 = 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right).$$

Нетрудно проверить, что при указанных значениях переменных верны неравенства

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2, \quad \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 2, \quad \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geqslant 2.$$

Значит,

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 3+2+2+2,$$

$$\text{т. е. } (a + b + c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9.$$

Неравенство доказано.

Пример 6. Докажем неравенство

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

Применить приём, использованный в предыдущем примере, здесь не удастся, поэтому поступим иначе. Воспользуемся тем, что при указанных значениях переменных левая и правая части неравенства являются положительными числами, и покажем, что неравенство того же смысла выполняется для их квадратов, т. е. докажем, что

$$\left(\sqrt{(a+c)(b+d)}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right)^2$$

при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

Преобразуем разность левой и правой частей этого неравенства:

$$\left(\sqrt{(a+c)(b+d)}\right)^2 - \left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)^2 =$$

$$= (a + c)(b + d) - \left(ab + 2\sqrt{abcd} + cd\right) =$$

$$= ab + bc + ad + cd - ab - 2\sqrt{abcd} - cd =$$

$$= bc + ad - 2\sqrt{abcd} = \left(\sqrt{bc}-\sqrt{ad}\right)^2.$$

Рассмотренная разность неотрицательна.
Значит,

$$\left(\sqrt{(a+c)(b+d)}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)^2.$$

Так как выражения $\sqrt{(a+c)(b+d)}$ и $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$ принимают положительные значения при указанных значениях переменных, то можно сделать вывод, что

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$$

при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, т. е. неравенство доказано.

Упражнения

950. Из данных неравенств выберите те, которые верны при любых значениях a:

а) $15a^2 + 4 > 0$;
б) $(a + 8)^2 > 0$;
в) $-a^2 - 2 < 0$;
г) $(-a)^2 + a^2 > 0$.

951. Докажите неравенство:

а) $(3x - 1)(2x - 2) > x(6x - 8)$;
б) $(3b - 4)(2b + 8) < (6b - 2)(b + 3)$;
в) $3a(a - 1) - 5a^2 < 4 - 3a$;
г) $(2c - 6)(c - 1) > c(c - 8)$.

952. Верно ли при любом значении x неравенство:

а) $(6x - 1)(x + 1) > (2x + 3)(3x - 2)$;
б) $(5 - 2x)(3 + x) < 2x(1 - x)$;
в) $(5 - x)^2 > (x + 8)(x - 18)$;
г) $(12 - x)(x + 12) > 3x(6 - x) + 2x(x - 9)$?

953. Используя выделение квадрата двучлена, докажите неравенство:

а) $x^2 - 6x + 15 > 0$;
б) $a^2 - 8a + 19 > 0$;
в) $y^2 > 4y - 5$;
г) $8b - 18 < b^2$.

954. Докажите неравенство:

а) $x^2 - x + 8 > 0$;
б) $4a^2 + 4ab + 3b^2 \geqslant 0$;
в) $4y^2 > 4y - 12$;
г) $9x^2 \geqslant 6xy - 7y^2$.

955. Докажите неравенство:

а) $\frac{(3a-2)^2}{6} + 2a > 0$;
б) $\frac{(5x-1)^2}{2} + 5x > 0$;
в) $\frac{a^2+3}{4} - \frac{a}{2} > 0$;
г) $\frac{(b-6)^2}{10} + \frac{b}{5} > 0$.

956. Докажите неравенство:

а) $x^2 + y^2 + 18x - 6y + 100 > 0$;
б) $a^2 + b^2 + 20 - 2a + 2b > 0$;
в) $4x^2 + a^2 > 4x - 2a - 28$;
г) $9b^2 + 4c^2 + 2 \geqslant 6b - 4c$.

957. Впишите вместо многоточия какое-либо число так, чтобы полученное неравенство было верно при любых значениях a и b:

а) $a^2 + b^2 - 8a - 16b + \ldots > 0$;
б) $a^2 - 4a + b^2 - 4b + \ldots > 0$;
в) $4a^2 + b^2 + 12a - 4b + \ldots > 0$;
г) $9a^2 + 16b^2 - 6a - 8b + \ldots > 0$.

958. Докажите неравенство:

а) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 3 > 0$;
б) $2x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 4y + 5 > 0$;
в) $x^2 - 4xy + 5y^2 + 2y + 2 > 0$;
г) $5x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 6 > 0$.

959. Докажите, что:

а) если $b > 5$, то $\frac{b-1}{2} - 2 > 0$;
б) если $x > 7$, то $4 - \frac{x+3}{5} < 2$.

960. Докажите, что:

а) $a + \frac{4}{a} > 4$ при $a > 0$;
б) $\frac{9}{y} > 6 - y$ при $y > 3$.

961. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то:

а) $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$;
б) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geqslant a + b$.

962. Докажите, что сумма двух положительных взаимно обратных чисел не меньше 2.

963. Докажите неравенство:

а) $a^2 + \frac{1}{a^2} \geqslant 2$ при $a \neq 0$;
б) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ при $ab > 0$.

964. Докажите, что во всяком треугольнике полупериметр больше каждой из сторон.

965. Докажите, что если a, b, c — стороны треугольника, то $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$.

966. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, то:

а) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geqslant 4$; б) $\frac{(a+b)^4 - (a-b)^4}{ab} > 0$.

967. Докажите, что при любых a, b и c:

а) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2(a + b + c) - 3$;

б) $(a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + ac + bc)$;

в) $(a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (b + c - a)^2 \geqslant ab + bc + ac$.

968. Докажите, что при $a > 0$ и $b > 0$ верно неравенство:

а) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geqslant \sqrt{a + b}$; б) $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geqslant \frac{a + b}{2}$.

969. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то:

а) $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$; б) $(a + b)\sqrt{ab} \geqslant 2ab$.

970. Пользуясь соотношением между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел, докажите неравенство:

а) $(a + b)(b + c)(a + c) \geqslant 8abc$ при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$;

б) $(a + 1)(b + 1) \geqslant 4\sqrt{ab}$ при $a > 0$, $b > 0$;

в) $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} \leqslant a + b + c$ при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$;

г) $\sqrt{(a + b)(c + d)} \leqslant \frac{1}{2}(a + c) + \frac{1}{2}(b + d)$ при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

971. Зная, что $a > 0$, $b > 0$, $a < b$, расположите в порядке возрастания числа:

$$a; \quad b; \quad \frac{a + b}{2}; \quad \sqrt{ab}; \quad \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}; \quad \frac{2ab}{a + b}.$$

972. Увеличится или уменьшится дробь $\frac{a}{b}$, где $a \in N$, $b \in N$, если к её числителю и знаменателю прибавить по 1?

Указание. Рассмотрите случаи, когда $a < b$ и $a > b$.

973. Расстояние между пунктами A и B равно 54 км. Мотоциклист рассчитал, с какой скоростью он должен ехать из пункта A в пункт B и обратно, чтобы вернуться в пункт A к намеченному времени. Однако из пункта A в пункт B он ехал со скоростью на 1 км/ч меньшей, а возвращался со скоростью на 1 км/ч большей, чем планировал. Докажите, что он не успел вернуться в пункт A к намеченному времени.

974. Одна группа туристов проехала 16 км по озеру, а другая проехала 8 км по течению реки и 8 км против течения реки. Скорость течения реки 2 км/ч. Какая из групп затратила на весь путь больше времени, если известно, что они использовали моторные лодки, имеющие одинаковую собственную скорость?

Упражнения для повторения

975. Найдите пересечение числовых промежутков:

а) $(-\infty; 4{,}8)$ и $(-\infty; 4)$;
б) $(7{,}2; +\infty)$ и $(7{,}7; +\infty)$;
в) $(-\infty; 6{,}5)$ и $(3; +\infty)$;
г) $(-\infty; -9)$ и $(-8; +\infty)$.

976. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 7 даёт остаток 3, а при делении на 3 — остаток 2.

977. Постройте график функции:

а) $y = 0{,}5x - 3$;
б) $y = -0{,}5x + 1$.

978. Решите уравнение:

а) $\frac{(3x-2)(x+1)}{3} - x(x + 11) = 0{,}4$;

б) $\frac{(6x-2)(x+0{,}5)}{6} - (x + 1)(x + 0{,}5) = 1$.

? Контрольные вопросы и задания

1. Сравните числа a и b, если разность $a - b$ равна -27; $3{,}2$; 0. Сформулируйте определение, которое было использовано при сравнении чисел.

2. Сформулируйте теоремы, выражающие свойства числовых неравенств, и докажите их.

3. Разъясните на примере, как оценить сумму, разность, произведение и частное чисел a и b, если $8 < a < 12$ и $5 < b < 6$.

4. Докажите неравенство $(4x - 1)(x + 1) > (3x + 6)(x - 1)$.
Разъясните, в чём состоит применённый вами приём доказательства неравенства.

§ 13. Решение неравенств с одной переменной и их систем

41. Решение неравенств с одной переменной

Задача. Туристы выехали на моторной лодке по течению реки и должны вернуться обратно к стоянке. Скорость лодки в стоячей воде равна 15 км/ч, а скорость течения реки 3 км/ч. На какое расстояние могут отъехать туристы, чтобы прогулка продолжалась менее 3 ч?

Пусть расстояние, на которое могут отъехать туристы, равно x км. Так как скорость лодки по течению реки равна 18 км/ч, а скорость лодки против течения реки равна 12 км/ч, то на путь по течению реки туристы затратят $\frac{x}{18}$ ч, а на путь против течения — $\frac{x}{12}$ ч. Всего в пути туристы будут находиться $\frac{x}{18}+\frac{x}{12}$ часов. По условию прогулка должна продолжаться менее 3 ч. Значит,

$$\frac{x}{18}+\frac{x}{12}<3.$$

Неравенство $\frac{x}{18}+\frac{x}{12}<3$, составленное по условию задачи, является *неравенством с одной переменной*. Нетрудно проверить, что при значении переменной x, равном, например, 10, 18, 20, это неравенство верно. Говорят, что каждое из чисел 10, 18, 20 является решением неравенства.

Определение. Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти множество его решений, иначе говоря, решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Определение. Неравенства, множества решений которых совпадают, называются равносильными.

В частности, неравенства, не имеющие решений, являются равносильными.

При решении неравенств стремятся данное неравенство заменить более простым, равносильным ему, для которого множество решений легко указать.

Для того чтобы сформулировать условия перехода к равносильному неравенству, введём понятие области определения неравенства.

Определение. **Областью определения неравенства с одной переменной называется множество значений переменной, при которых обе части неравенства имеют смысл.**

Например, областью определения неравенства $\frac{3x-1}{2} > 5x+4$ является множество всех чисел, а неравенства $\frac{6}{x-3} > x+1$ — множество, состоящее из всех чисел, кроме 3.

Для неравенств с одной переменной справедливы свойства, аналогичные свойствам уравнений с одной переменной.

Из данного неравенства получается равносильное ему неравенство, если:

1) перенести слагаемое из одной части неравенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный;

2) обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число;
обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив знак неравенства на противоположный;

3) в какой-либо части неравенства или в обеих его частях выполнить тождественное преобразование, не меняющее области определения неравенства.

Первые два свойства можно доказать, используя свойства числовых неравенств. Третье свойство вытекает из того, что в результате тождественного преобразования получается выражение, значение которого совпадает со значением исходного выражения при всех допустимых значениях переменных.

Заметим, что требование сохранения области определения неравенства является существенным. Так, например, если в неравенстве $3x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} > -6$ заменить нулём разность $\frac{1}{x} - \frac{1}{x}$, то получится неравенство $3x > -6$, которое не равносильно данному. Действительно, число 0 является решением второго неравенства, но не является решением первого, так как при $x = 0$ левая часть первого неравенства не имеет смысла.

Рассмотрим примеры решения неравенств. Начнём с простейших неравенств вида $ax > b$ и $ax < b$, где a и b — некоторые числа. Неравенства такого вида называются *линейными неравенствами с одной переменной*.

Пример 1. Решим неравенство:

а) $0{,}2x > 4$; б) $-18x > 5{,}4$.

Заменим каждое из неравенств равносильным ему неравенством вида $x > a$ или $x < a$, где a — некоторое число.

а) Разделив обе части неравенства на 0,2, получим:

$$x > 20.$$

Множеством решений этого неравенства является числовой промежуток $(20; +\infty)$ (рис. 43). Ответ можно записать как в виде промежутка $(20; +\infty)$, так и в виде неравенства, задающего этот промежуток.

Рис. 43

б) Разделим обе части неравенства на отрицательное число -18, изменив при этом знак неравенства на противоположный. Получим:

$$x < -0{,}3.$$

Множество решений этого неравенства — числовой промежуток $(-\infty; -0{,}3)$ (рис. 44).

Рис. 44

Особый случай представляют собой неравенства вида $0x < b$ и $0x > b$, где b — некоторое число. Неравенство такого вида либо не имеет решений, либо решением неравенства является любое число.

Пример 2. Решим неравенство:

а) $0x < 7$; б) $0x < -3$.

а) Так как произведение $0x$ равно 0, то неравенство верно при любом значении x. Множеством решений неравенства является множество всех действительных чисел, т. е. промежуток $(-\infty; +\infty)$.

б) Так как произведение $0x$ при любом x равно 0, то заданное неравенство не имеет решений.

При решении более сложных неравенств стремятся, применяя тождественные преобразования и сформулированные выше свойства неравенств с переменными, заменить данное неравенство простейшим неравенством вида $ax > b$ или $ax < b$.

Пример 3. Решим неравенство

$$2x(8x - 3) - (4x - 1)^2 < 13 - x.$$

Раскроем скобки в левой части неравенства:

$$16x^2 - 6x - 16x^2 + 8x - 1 < 13 - x.$$

Перенесём слагаемые -1 и $-x$ с противоположными знаками из одной части неравенства в другую и выполним приведение подобных членов:

$$16x^2 - 6x - 16x^2 + 8x + x < 13 + 1,$$

$$3x < 14.$$

Разделив обе части неравенства на 3, найдём, что

$$x < 4\frac{2}{3}.$$

Мы последовательно заменяли одно неравенство другим, равносильным ему. В результате получили неравенство $x < 4\frac{2}{3}$, равносильное исходному. Множеством решений полученного неравенства, а значит, и исходного неравенства, является числовой промежуток $\left(-\infty;\ 4\frac{2}{3}\right)$.

Пример 4. Вернёмся к задаче, рассмотренной в начале пункта. Решим составленное неравенство

$$\frac{x}{18} + \frac{x}{12} < 3.$$

Умножим обе части неравенства на наименьший общий знаменатель дробей, т. е. на 36. Получим:

$$\left(\frac{x}{18} + \frac{x}{12}\right) \cdot 36 < 3 \cdot 36,$$

$$\frac{x}{18} \cdot 36 + \frac{x}{12} \cdot 36 < 108,$$

$$2x + 3x < 108.$$

Выполним приведение подобных членов:

$$5x < 108.$$

Разделив обе части неравенства на 5, найдём, что

$$x < 21{,}6.$$

Теперь можно ответить на вопрос задачи: туристы могут отплыть на расстояние, меньшее, чем 21,6 км.

Упражнения

979. Является ли решением неравенства $5x^3 + 1 < 3x^2 + x$ число:

а) -3; б) -2; в) -1; г) 0; д) 2?

980. Решите неравенство:

а) $-3x > -27$; г) $0{,}2x \geqslant \frac{1}{7}$; ж) $0x < -18$;

б) $0{,}5x \leqslant 22$; д) $-\frac{1}{7}x < -0{,}3$; з) $\left(\sqrt{3} - 1\right)x \geqslant 2$;

в) $-x \geqslant 1$; е) $0x > -4$; и) $\left(\sqrt{3} - 2\right)x < 2 - \sqrt{3}$.

981. Решите неравенство и изобразите на координатной прямой множество его решений:

а) $6 + 2x > 1$;
б) $2 - 7x < 0$;
в) $1 - 0,4x \leqslant 1$;
г) $2 - 0,8x > 4$;
д) $0,6x + 2 > 6 - x$;
е) $0,2x - 11 < 4 + 0,5x$;
ж) $1,7x + 4 \geqslant 2 + 1,5x$;
з) $2 - 3x \leqslant 1,4 - 2x$.

982. При каких значениях x двучлен $0,7x - 7$ принимает:

а) положительные значения;
б) отрицательные значения;
в) значения, большие 7;
г) значения, меньшие -1?

983. Функция задана формулой $y = 0,5x + 1$. При каких значениях x:

а) $y = 0$; б) $y > 0$; в) $y < 0$?

Постройте график функции и проиллюстрируйте свой ответ на графике.

984. Функция задана формулой $y = -0,5x + 2$. При каких значениях x функция принимает положительные и при каких — отрицательные значения? Найдите ответ двумя способами:

а) решив соответствующее неравенство;

б) построив график функции.

985. При каких значениях p:

а) $|p| = p$;
б) $|p - 1| = 1 - p$;
в) $|0,8 - 0,3p| = 0,8 - 0,3p$;
г) $|1,4 - 6p| = 6p - 1,4$?

986. Решите неравенство:

а) $2(3 - x) - (4x - 1) < x + 6$;
б) $4(2a - 1) - 3(a + 6) > a$;
в) $3(2y - 5) + 2(3y - 5) < 6y$;
г) $0,8(2 - x) - 0,6(3 - 2x) < 4$;
д) $0,5(6 - x) + (1 + 3x) > 0,2$;
е) $0,6(2x + 1) - 0,4(3x + 2) > 1$.

987. Решите неравенство:

а) $3x(2x - 1) - 6x^2 > 2 - x$;
б) $12y^2 - (3y + 4)4y > y - 10$;
в) $(1 + 3x)(3x - 1) > 6x + 9x^2$;
г) $(4x - 3)(3 + 4x) + x < 16x^2$.

988. Решите неравенство:

а) $(x - 2)^3 + x^2(6 - x) < (3x - 1)^2 - 9x(x + 2)$;
б) $6(y + 1)(y^2 - y + 1) - 2y(3y^2 - 1) \geqslant 5(0,2y - 1)$;
в) $(2x + 1)^3 - 4x^2(2x + 3) > (0,2 + x)(x - 0,2) - x(x - 2)$;
г) $(4y^2 + 1 + 2y)(2y - 1) - 2y(4y^2 + 3) \leqslant 2,5(2 - 3y)$.

989. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

а) $5,6(3 + y) - 1,6(2 + y) < 0$;
б) $8,4(3 - y) + 1,2(2y - 1) > 39$.

990. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

а) $0,3(6 - x) - 0,5(1 - 2x) > 11$; б) $0,8(1 - 4x) + 0,5(2 + 6x) < 26$.

991. При каких значениях b равносильны неравенства:

а) $b^2x > 5$ и $x > \frac{5}{b^2}$; в) $bx > 8 + 3x$ и $x > \frac{8}{b-3}$;

б) $b^3x < 2$ и $x > \frac{2}{b^3}$; г) $2bx - 4 < 3x$ и $x > \frac{4}{2b-3}$?

992. При каких значениях a множеством решений неравенства:

а) $0,3x - 6 < a$ является числовой промежуток $(-\infty; 4)$;

б) $8x > 1,8a + x$ является числовой промежуток $(6; +\infty)$?

993. Решите относительно x неравенство:

а) $(m + 1)x - 4 < (1 - 3m)x + 2$, если $m > 0$;

б) $(2 + m)x + 6 < (2 - 3m)x - 1$, если $m < 0$.

994. Известно, что A — множество решений неравенства $3x - 1 < a$, где a — некоторое число. Укажите три каких-либо значения a, при которых числовой промежуток $[5; 8]$ является подмножеством множества A.

995. Известно, что A — множество решений неравенства $2x - 1 < 5,8$, B — множество решений неравенства $x - 1 < m$, где m — некоторое число. Укажите наименьшее натуральное значение m, при котором выполняется соотношение:

а) $A \subset B$; б) $B \subset A$.

996. Решите неравенство:

а) $\frac{5x}{2} < 2$; в) $\frac{6 + 0,5x}{7} < 11$; д) $\frac{26 - 0,7x}{5} \geqslant 1$;

б) $\frac{0,3x}{4} > 1,5$; г) $\frac{12 - 0,2x}{9} > -7$; е) $\frac{11 - 0,3x}{2} \leqslant 5$.

997. При каких значениях x:

а) значение дроби $\frac{1,6 - 12x}{8}$ положительно;

б) значение дроби $\frac{1,5 + 7x}{5}$ отрицательно?

998. Решите неравенство:

а) $\frac{1}{6}(0,2x - 4) > 2$; г) $\frac{y}{12} - \frac{y}{8} \geqslant \frac{1}{3}$;

б) $\frac{2}{3}(0,1x - 1) < -0,6$; д) $\frac{0,3y}{4} - \frac{0,1y - 1}{12} < -0,3$;

в) $\frac{x}{4} - \frac{x}{2} < 1,5$; е) $\frac{0,1y}{6} - \frac{0,3y + 2}{12} \geqslant -\frac{1}{4}$.

999. Решите неравенство и покажите множество его решений на координатной прямой:

а) $\frac{2x-1}{4}-\frac{3x}{2}>0$;

б) $\frac{5-3x}{6}+\frac{2x}{9}\leqslant 1$;

в) $\frac{103-2x}{15}+\frac{x-104}{20}<2$;

г) $\frac{82-3x}{12}-\frac{43-x}{8}\geqslant 2$.

1000. При каких значениях a:

а) сумма дробей $\frac{0{,}3-0{,}2a}{6}$ и $\frac{0{,}1a-1{,}5}{12}$ меньше 5;

б) разность дробей $\frac{0{,}6a-1}{8}$ и $\frac{3+0{,}05a}{4}$ больше 6?

1001. Решите неравенство:

а) $\frac{8-3x}{2}-x<5$;

б) $x>4+\frac{2-x}{4}$;

в) $7\leqslant x-\frac{2(x-0{,}5)}{3}$;

г) $3-2x-\frac{6+4x}{3}>0$;

д) $1+\frac{2(1{,}5-x)}{5}-x\leqslant 0$;

е) $0{,}7x+\frac{2x-4}{3}-\frac{x}{6}>1$.

1002. Решите неравенство:

а) $0{,}6x+\frac{3-x}{2}>\frac{1{,}3+1{,}1x}{2}$;

б) $\frac{0{,}5x-1}{2}-x<2+\frac{3x}{2}$;

в) $2\cdot\frac{1{,}3x+7}{5}<x-\frac{6x-2}{25}$;

г) $3\cdot\frac{0{,}5x-1}{2}-\frac{x}{8}>0{,}3x$.

1003. Найдите все целые отрицательные значения x, при которых верно неравенство:

а) $\frac{x-5}{2}-3x<1$;

б) $\frac{3-2x}{4}-\frac{x}{2}<3$.

1004. Найдите наибольшее натуральное значение p, при котором верно неравенство:

а) $0{,}6p+\frac{3-p}{2}<\frac{8{,}6+0{,}1p}{4}$;

б) $2-\frac{0{,}5p+40{,}5}{6}+\frac{3p}{8}\leqslant -\frac{p}{2}$.

1005. Сколько элементов содержит множество M, если:

а) $M=\left\{x \mid x\in \boldsymbol{N},\ x-1<\frac{2x-1}{3}+\frac{x}{2}\right\}$;

б) $M=\left\{x \mid x\in \boldsymbol{N},\ x+1\geqslant\frac{x-1}{3}+\frac{3x}{2}\right\}$;

в) $M=\left\{x \mid x\in \boldsymbol{Z},\ \frac{2x-1}{3}+1\geqslant x-\frac{x}{3}\right\}$?

1006. При каких значениях переменной x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{0{,}6x-1}$; в) $\sqrt{2x+(x-1)^2}$;

б) $\sqrt{2-0{,}8x}$; г) $\sqrt{2x-(x+1)^2}$?

1007. Найдите область допустимых значений переменной в выражении:

а) $\dfrac{\sqrt{2x-3{,}2}}{2x-5}$; в) $\dfrac{5-2x}{2-\sqrt{2x-1}}$;

б) $\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{3-2x}}$; г) $\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{3-x}$.

1008. Найдите все значения p, при которых квадратное уравнение $3x^2-2x+p=0$:

а) не имеет корней;
б) имеет два различных корня;
в) имеет решение.

1009. При каких значениях параметра a уравнение $(a-2)x^2-4x-5=0$ не имеет корней?

1010. При каких значениях параметра b уравнение $(b+1)x^2+2x+1=0$ имеет два различных корня?

1011. Решите относительно x уравнение и найдите, при каких значениях m корень уравнения является отрицательным числом:

а) $0{,}2(x-3m)+1{,}3(x+2m)=14$;

б) $0{,}6(3m-2x)-0{,}5(8m+x)=m+16$.

1012. В один резервуар налито 70 л воды, а в другой — 150 л. В первый резервуар в минуту вливается по 6 л, а из второго в минуту выливается по 10 л. В какие моменты времени в первом резервуаре будет меньше воды, чем во втором?

1013. Из пункта A в пункт B отправился велосипедист со скоростью 15 км/ч. Спустя 30 мин навстречу ему из пункта B выехал другой велосипедист. С какой скоростью должен ехать второй велосипедист, чтобы встретиться с первым через 2 ч 30 мин после своего выезда в точке, расположенной ближе к пункту A?

1014. Зная, что сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$, найдите наименьшее число сторон, начиная с которого эта сумма больше $1000°$.

1015. Зная, что угол правильного n-угольника равен $\dfrac{180°(n-2)}{n}$, найдите наименьшее число сторон, начиная с которого этот угол больше $150°$.

1016. Одна ремонтная мастерская берёт по 37 р. за каждую облицовочную плитку и ещё 1840 р. за работу, а другая берёт по 43 р. за плитку и 1460 р. за работу. Укажите наименьшее число плиток, при котором выгоднее сделать заказ в первой мастерской, чем во второй.

1017. При каком значении c уравнение

$$4x^2 - 4(3c - 1)x + 1 - 6c = 0$$

имеет:

а) два положительных корня;

б) два отрицательных корня;

в) положительный и отрицательный корни?

Упражнения для повторения

1018. Укажите все целые числа, принадлежащие множеству $A \cap B$, если:

а) $A = (-\infty;\ 1{,}5)$, $B = (-3{,}2;\ +\infty)$;

б) $A = (-\infty;\ 0)$, $B = (-2{,}3;\ +\infty)$.

1019. Укажите все дроби вида $\frac{1}{n}$, где $n \in N$, которые принадлежат промежутку $[0{,}1;\ 0{,}2]$.

1020. При делении на 7 одно число даёт остаток 2, а другое — остаток 6. Какой остаток получится при делении на 7 произведения этих чисел?

1021. Найдите частное и остаток от деления квадратного трёхчлена $x^2 + x - 8$ на двучлен $x - 5$.

42. Решение систем неравенств с одной переменной

Пусть даны линейные функции, заданные формулами $y = \frac{1}{3}x + 1$ и $y = -2x + 4$, и требуется найти множество значений x, при которых обе функции принимают положительные значения. Для этого надо найти множество общих решений неравенств $\frac{1}{3}x + 1 > 0$ и $-2x + 4 > 0$.

Если ставится задача найти множество общих решений двух или нескольких неравенств, то говорят, что надо решить <u>систему неравенств</u>.

Определение. Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

Решить систему неравенств — значит найти множество её решений. Иначе говоря, решить систему неравенств — значит найти все её решения или доказать, что их нет. Множеством решений системы является *пересечение множеств решений неравенств, входящих в эту систему*.

В записи для обозначения системы неравенств используют фигурную скобку.

Вернёмся к задаче, поставленной в начале пункта. Для того чтобы ответить на вопрос задачи, надо решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 > 0, \\ -2x + 4 > 0. \end{cases}$$

Заменяя последовательно каждое неравенство равносильным ему неравенством, получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x > -1, \\ -2x > -4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -3, \\ x < 2. \end{cases}$$

Рис. 45

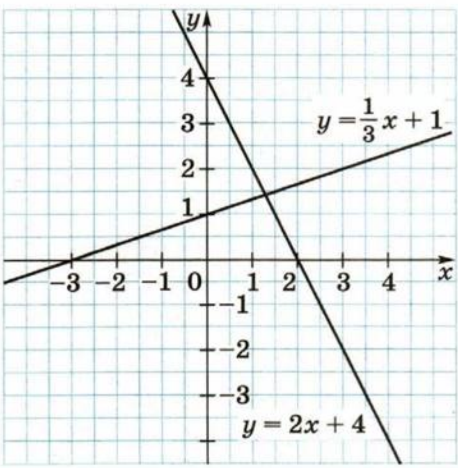


Рис. 46

Изобразим на координатной прямой решение неравенств $x > -3$ и $x < 2$ (рис. 45). На рисунке видно, что общими решениями этих неравенств являются значения x, заключённые между числами −3 и 2. Значит, множеством решений системы является числовой промежуток (−3; 2).

Итак, мы нашли, что обе функции $y = \frac{1}{3}x + 1$ и $y = -2x + 4$ принимают положительные значения при $x \in (-3; 2)$.

Геометрическая иллюстрация полученного вывода дана на рисунке 46, где построены графики этих функций.

Из рисунка видно, что промежуток (−3; 2) представляет собой множество значений x, при которых оба графика расположены выше оси x.

Приведём примеры решения систем неравенств.

Пример 1. Решим систему неравенств $\begin{cases} 5x - 12 > 17, \\ 3 - x < 0. \end{cases}$

Переходя от каждого неравенства системы к равносильному ему неравенству, получим:

$$\begin{cases} 5x > 29, \\ -x < -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 5{,}8, \\ x > 3. \end{cases}$$

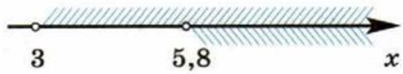


Рис. 47

Решениями системы служат значения x, большие 5,8 (большего из чисел 5,8 и 3), т. е. удовлетворяющие условию $x > 5{,}8$. Значит, множеством решений системы является числовой промежуток $(5{,}8; +\infty)$. Геометрическая иллюстрация этого вывода дана на рисунке 47.

Ответ можно записать в виде числового промежутка $(5{,}8; +\infty)$ или в виде неравенства $x > 5{,}8$, которое задаёт этот промежуток.

Пример 2. Решим систему неравенств $\begin{cases} \frac{1}{3}x - 2 < 4, \\ -0{,}2x > -1. \end{cases}$

Имеем:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x < 6, \\ x < 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 18, \\ x < 5. \end{cases}$$

Рис. 48

Изобразим на координатной прямой решения неравенств $x < 18$ и $x < 5$ (рис. 48). На рисунке видно, что общими решениями этих неравенств являются значения x, меньшие 5 (меньшего из чисел 18 и 5), т. е. удовлетворяющие условию $x < 5$. Значит, множеством решений системы является числовой промежуток $(-\infty; 5)$.

Пример 3. Решим систему неравенств $\begin{cases} 0{,}2x - 0{,}6 > 1, \\ 2 - 1{,}5x > 5. \end{cases}$

Имеем:

$$\begin{cases} 0{,}2x > 1{,}6, \\ -1{,}5x > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 8, \\ x < -2. \end{cases}$$

Рис. 49

Изобразим на координатной прямой решения неравенств $x > 8$ и $x < -2$ (рис. 49). На рисунке видно, что система не имеет решений, так как не существует значений x, удовлетворяющих обоим условиям: $x > 8$ и $x < -2$. Значит, множеством решений системы является пустое множество.

Пример 4. Решим двойное неравенство $-5 < 6 - 2x < 7$.

Двойное неравенство представляет собой другую запись системы неравенств:

$$\begin{cases} 6 - 2x < 7, \\ 6 - 2x > -5. \end{cases}$$

Решая её, найдём, что

$$\begin{cases} x > -0{,}5, \\ x < 5{,}5, \end{cases}$$

т. е.

$$-0{,}5 < x < 5{,}5.$$

Запись решения удобно вести в виде цепочки двойных неравенств:

$$-5 < 6 - 2x < 7,$$
$$-11 < -2x < 1,$$
$$11 > 2x > -1,$$
$$5{,}5 > x > -0{,}5.$$

Множеством решений заданного двойного неравенства является числовой промежуток $(-0{,}5;\ 5{,}5)$.

Упражнения

1022. Является ли решением системы неравенств $\begin{cases} 3 - 2x < 1, \\ 6 + 4x < 19 \end{cases}$ число:

а) -1; б) 0; в) 2; г) $3{,}5$; д) $6{,}25$?

1023. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x > 3\frac{1}{3}, \\ x > 3{,}2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}2x > 0, \\ 6x \leqslant 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 0x > -5, \\ x > 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x < -1{,}4, \\ x < -1{,}5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0{,}3x \geqslant 5, \\ 0{,}1x \leqslant 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 6x < 12, \\ 0x < -3. \end{cases}$

1024. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 6 - 11x > x, \\ 0{,}7x < x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2 - 3x \geqslant 4x, \\ 3x < 0{,}2x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3 - 4x \leqslant 0, \\ \frac{1}{9}x \leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6x - 1 < 0, \\ \frac{1}{7}x \geqslant -1. \end{cases}$

1025. При каких значениях x обе функции

$$y = -0{,}2x + 1 \text{ и } y = \sqrt{0{,}3x + 4}$$

принимают отрицательные значения?

1026. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\sqrt{3x-4,2}+\sqrt{3,2-2x}$;

б) $f(x)=\sqrt{0,4x-1}+\sqrt{0,6x+4}$;

в) $g(x)=\dfrac{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x}}{x-1}$;

г) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{5-x}}{x-4}$;

д) $h(x)=\dfrac{x}{\sqrt{0,4-6x}-\sqrt{3x-0,1}}$;

е) $h(x)=\dfrac{\sqrt{1,7x+1}-\sqrt{0,4x+3}}{\sqrt{x}}$.

1027. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}5-2x>3-x,\\6+4x<8+x;\end{cases}$

б) $\begin{cases}14-3x<1-x,\\1+7x>2+6x;\end{cases}$

в) $\begin{cases}6(2-x)-3(4x+1)>0,\\1-2(6x-1)>3;\end{cases}$

г) $\begin{cases}1,2(x-5)-0,2(3+x)>8,\\2,5(4x-2)-x>4;\end{cases}$

д) $\begin{cases}0,3x+1<0,4x-2,\\1,5x-3>1,3x-1;\end{cases}$

е) $\begin{cases}1,9x-0,4>1,7x-0,1,\\6,8x+2,3<2+6,5x;\end{cases}$

ж) $\begin{cases}15(x-2)-x(1-x)>x^2,\\6-2x>0;\end{cases}$

з) $\begin{cases}(x-4)(x+6)<x^2-2,\\16-x<x.\end{cases}$

1028. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}9(x+3)<5(x+1)+6(x+2),\\2(x-18)<7x-3(2x+3);\end{cases}$

б) $\begin{cases}3(x+1)>2(3-x)+4x,\\6(x-1)+2(3-x)>x;\end{cases}$

в) $\begin{cases}12(2-x)+x(4+x)<x^2,\\(6x+7)(7-6x)>-(6x-1)^2;\end{cases}$

г) $\begin{cases}(2x-1)(x+2)>2x^2,\\(0,2x-3)^2<(0,1x+6)(0,4x-1);\end{cases}$

д) $\begin{cases}(2x-1)^3-4x^2(2x-3)<x+2,5,\\0,2(x-18)<0,7x-0,3(2x+3);\end{cases}$

е) $\begin{cases}(x+6)^3-x^2(x+18)>x+2,\\0,6(x-1)>0,5(1+x).\end{cases}$

1029. Решите систему неравенств и укажите все целые числа, которые являются её решениями:

а) $\begin{cases}0,5(2-x)>0,2,\\-3x\leqslant 9;\end{cases}$

б) $\begin{cases}0,8-3x<1,\\-2(x-3)\geqslant 0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}0,7(x-1)<0,9,\\-0,2(x-4)\leqslant 1,2;\end{cases}$

г) $\begin{cases}16(1-0,25x)<x,\\5(1+0,6x)<21.\end{cases}$

1030. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} 10{,}9 - 2x < 0, \\ 12x - 90 < x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x+3)^3 > x^2(x+9), \\ 37 - 12x > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1 - 3x < 3, \\ 6 - 2x \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (4-x)^3 - x^2(12-x) < 0, \\ 7 - 3x > 0. \end{cases}$

1031. Замените a каким-либо числом так, чтобы множество целых чисел, удовлетворяющих системе $\begin{cases} 3x > 41{,}7, \\ 2x - a < 0: \end{cases}$

а) состояло из пяти чисел;

б) было пустым множеством.

1032. При каких значениях a не имеет решений система неравенств:

а) $\begin{cases} 0{,}3x - 4{,}5 < 0, \\ x - a > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}5(x-2) \geqslant 0{,}4, \\ 2x - a \leqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0{,}5x - 1{,}5 < 0, \\ 3x - a > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0{,}2x - 4 > 0{,}5x - 8, \\ 6x - 1 > a + 2? \end{cases}$

1033. При каких значениях b имеет решения система неравенств:

а) $\begin{cases} 0{,}5(x-2) \geqslant 0{,}4, \\ 2x - b \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 12 + 3x \leqslant 6 + 2{,}5x, \\ 4x + 2{,}3 \geqslant b - 1{,}7? \end{cases}$

1034. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3} < 1, \\ \dfrac{10-x}{2} > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{x-4}{6} < \dfrac{2x}{3}, \\ x - \dfrac{x-1}{4} < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{y}{10} + \dfrac{2y}{5} < 1, \\ \dfrac{3y}{4} - 1 > y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2y - \dfrac{y+4}{4} < 2, \\ \dfrac{3-y}{2} - y < 3y. \end{cases}$

1035. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{0{,}2x+2}{3} - \dfrac{0{,}3x-1}{2} < 1, \\ \dfrac{6-5x}{2} > 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{0{,}3x+1}{2} - x \leqslant 3{,}9, \\ \dfrac{x-4}{6} - 1 \geqslant \dfrac{x}{15}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{0{,}2x-1}{3} - \dfrac{0{,}1x}{4} > 2, \\ 3 - \dfrac{x}{4} < 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{1{,}3-x}{2} - \dfrac{0{,}5x}{4} \leqslant x, \\ 1 - \dfrac{x}{3} \leqslant \dfrac{x}{4}. \end{cases}$

1036. Найдите наибольшее целое число (если оно существует), удовлетворяющее системе неравенств:

а) $\begin{cases} 8(3-x)-2x>0, \\ \frac{x}{4}-\frac{x}{2}<1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -x<2, \\ \frac{x-3}{4}-x>0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x}{4}-1>x, \\ \frac{3-x}{2}>0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5-\frac{x}{4}>0, \\ \frac{3x-4}{4}>-1. \end{cases}$

1037. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее системе неравенств:

а) $\begin{cases} \frac{5+x}{3}-2x<0, \\ \frac{x}{4}-\frac{2}{3}(x-5)>\frac{x-8}{6}-x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x-3}{4}-x<\frac{1}{3}(1-x), \\ 2x-5>\frac{x+1}{6}+\frac{1}{3}x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x-8}{4}-\frac{1}{3}(x-1)<0, \\ \frac{3-x}{2}-0{,}2x>\frac{8-3x}{4}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-\frac{x+6}{5}-\frac{x-1}{4}>\frac{3x-2}{20}, \\ 2x>3-\frac{x-8}{4}. \end{cases}$

1038. При каких значениях a решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x+y=a-4, \\ x-y=a-1 \end{cases}$$

удовлетворяет условию: $x<0$, $y>0$?

1039. При каких значениях b решение системы уравнений

$$\begin{cases} x-2y=2b+1, \\ 6y-x=8b+3 \end{cases}$$

удовлетворяет условию: $x>0$, $y<0$?

1040. При каких значениях a прямые $y=0{,}8x+2(a-4)$ и $y=1{,}6x+5(a-1)$ пересекаются в точке, расположенной:

а) в первой координатной четверти;

б) во второй координатной четверти?

1041. Решите двойное неравенство:

а) $11<5x+1<16$;

в) $-1\leqslant\frac{1}{3}x-2\leqslant 0$;

б) $0<2-x<3$;

г) $4{,}5\leqslant 0{,}5-2x\leqslant 6{,}9$.

1042. Решите двойное неравенство:

а) $11 < 8 + 10x < 26$;　　в) $-5 \leqslant 1 + 3x \leqslant -2$;

б) $-1 < \frac{16-x}{4} < 1$;　　г) $-1 \leqslant \frac{8-4x}{3} \leqslant 0$.

1043. Решите двойное неравенство и укажите все целые числа, которые являются его решениями:

а) $1,5 < \frac{2+x}{2} < 2,5$;　　в) $0 < \frac{3x-2}{3} < 1$;

б) $-1 < \frac{2-x}{3} < 0,5$;　　г) $1 < \frac{4-2x}{3} < 2$.

1044. а) При каких b значение двучлена $2b + 2$ принадлежит промежутку $[-6; 6]$;

б) при каких y значения дроби $\frac{3+2y}{5}$ принадлежат промежутку $(-4; 2)$?

1045. Найдите все целые числа, удовлетворяющие системе:

а) $\begin{cases} -1 < \frac{1}{3}x - 2 < 1, \\ 8(0,5x - 1) > 6x - 22; \end{cases}$　　в) $\begin{cases} -3 < \frac{x-8}{5} < 1, \\ 4(x - 3,6) > 3(x - 2); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0 < \frac{1}{7}x - \frac{1}{3} < 1, \\ 6(2 - 0,5x) < x; \end{cases}$　　г) $\begin{cases} -3,5 < \frac{3x-1}{2} < 2,5, \\ 3(3,5 - x) > 2x + 5. \end{cases}$

1046. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x > 28, \\ x > 32, \\ x > 11; \end{cases}$　　б) $\begin{cases} y < -4, \\ y < 12, \\ y < 0; \end{cases}$　　в) $\begin{cases} a > 1, \\ a > 5, \\ a < 9; \end{cases}$　　г) $\begin{cases} b < -2, \\ b < -4, \\ b > 0. \end{cases}$

1047. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} -x < 2, \\ 4x < 0,8, \\ 5x > -1,5; \end{cases}$　　б) $\begin{cases} 2 - x > 0,5, \\ 6 - x > 6, \\ 2x + 3 > 1; \end{cases}$　　в) $\begin{cases} 3x - 8 > x - 4, \\ 3 - 2x > 4 - x, \\ 5 - x > 1 - 3x. \end{cases}$

1048. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 6-2x>4{,}5(2x-1)+2, \\ \frac{2}{3}(x+6)>2x, \\ \frac{x-0{,}4}{2}>0{,}5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (6x-1)(x+2)-6x^2<0, \\ \frac{1}{3}(x-1)<\frac{x}{12}, \\ 5(x-2)>2(3x-4); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 15-6(3x-1)>0{,}5(4x-2), \\ \frac{1}{3}(2x+1)<x, \\ \frac{2x+1}{7}-\frac{3x-1}{14}>0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{x+4}{3}>\frac{x-1}{4}-\frac{x}{2}, \\ 3x>1-0{,}5(1-4x), \\ 1{,}5(x-2)>x-1. \end{cases}$

1049. При каких значениях a не имеет решений система неравенств:

а) $\begin{cases} 3x-1<0, \\ 0{,}2x+1>0, \\ 3x+4<3a; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2(x-1)-3x<0, \\ 6(2-x)-x>3x, \\ 4x-5<3(a-1); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x+7>0, \\ 3>2x-4, \\ 5(x+3)<2a; \end{cases}$

г) $\begin{cases} -0{,}6(2-x)+x<-2, \\ 0{,}1x-0{,}2(2-x)<0{,}2, \\ 5(x+1)>a+3? \end{cases}$

1050. Если к некоторому натуральному числу прибавить его половину, то сумма будет больше 29, а если из этого числа вычесть его треть, то разность будет меньше 14. Найдите это натуральное число.

1051. Представьте число 75 в виде суммы двух натуральных чисел так, чтобы половина первого была меньше 29, а второе было меньше $\frac{1}{3}$ первого.

1052. Длина основания равнобедренного треугольника равна 36 см, а его периметр меньше 80 см. Какую длину может иметь боковая сторона треугольника?

1053. Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна 18 см, а его периметр больше 65 см. Какую длину может иметь основание треугольника?

1054. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 384 км, выехали одновременно навстречу друг другу пассажирский и товарный поезда, причём скорость товарного была на 20 км/ч меньше скорости пассажирского. Через 3 ч поезда ещё не встретились, а через 4 ч оказалось, что встреча уже произошла и оба поезда, миновав место встречи, продолжают движение. Какой может быть скорость товарного поезда?

Упражнения для повторения

1055. Докажите, что:

а) $\frac{2-x}{2}-1<0$ при $x > 0$;

б) $\frac{a-2}{2}-\frac{a-1}{3}>0$ при $a > 4$.

1056. Функция задана формулой $y = 0{,}7x - 1$. Найдите значение y при x, равном $-1{,}5$; 0; 1,5. При каком x значение y равно 0; 2; 1000?

1057. Какие остатки могут получиться при делении квадрата натурального числа на 9?

43. Решение совокупностей неравенств с одной переменной

Пусть требуется найти множество значений переменной x, при которых значение выражения $(x + 2)(x - 1)$ положительно. Воспользуемся тем, что *произведение двух множителей положительно, если множители имеют одинаковые знаки*: либо оба множителя положительны, либо оба — отрицательны. Неравенство $(x + 2)(x - 1) > 0$ будет выполняться, если будет выполняться хотя бы одна из систем: $\begin{cases} x+2>0, \\ x-1>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+2<0, \\ x-1<0. \end{cases}$

Решая первую систему, найдём $\begin{cases} x>-2, \\ x>1, \end{cases}$ откуда $x > 1$. Вторая система после упрощения примет вид $\begin{cases} x<-2, \\ x<1, \end{cases}$ откуда $x < -2$.

Таким образом, произведение $(x + 2)(x - 1)$ будет положительным, если выполняется хотя бы одно из неравенств: $x > 1$ или $x < -2$.

Если ставится задача найти множество чисел, каждое из которых является решением хотя бы одного из двух или нескольких неравенств, то говорят, что надо решить совокупность неравенств.

> **Определение. Решением совокупности неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно хотя бы одно из неравенств совокупности.**

Решить совокупность неравенств — значит найти множество её решений. Другими словами, решить совокупность неравенств — значит найти все её решения или доказать, что их нет. Множеством решений совокупности является *объединение множеств решений неравенств, входящих в эту совокупность*.

В записи для обозначения совокупности неравенств используют квадратную скобку. Так, в рассмотренном в начале пункта примере для ответа на поставленный вопрос нужно решить совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > 1. \end{array}\right.$$

Решением этой совокупности служит объединение двух открытых числовых лучей: $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. Этот результат можно наглядно проиллюстрировать с помощью координатной прямой (рис. 50).

Рис. 50

К решённому примеру нужно сделать несколько дополнительных замечаний. Решая неравенство $(x + 2)(x - 1) > 0$, мы заменили его равносильной совокупностью двух систем: $\begin{cases} x+2>0, \\ x-1>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+2<0, \\ x-1<0. \end{cases}$ Строго говоря, это нужно было записать так:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2>0, \\ x-1>0, \end{cases} \\ \begin{cases} x+2<0, \\ x-1<0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Однако такая запись выглядит довольно громоздко. Поэтому мы чаще будем вести запись, используя термин «совокупность» вместо квадратной скобки.

Заметим, что если $a < b$, то решением каждого из равносильных неравенств $(x - a)(x - b) > 0$, $\frac{x-a}{x-b}>0$ и $\frac{x-b}{x-a}>0$ является совокупность $\left[\begin{array}{l} x < a, \\ x > b. \end{array}\right.$

Рассмотрим еще один пример. Пусть теперь требуется найти множество значений переменной x, при которых значение выражения $x(x - 3)$ отрицательно. Воспользуемся тем, что произведение двух множителей отрицательно, если множители имеют различные знаки. Неравенство $x(x - 3) < 0$ равносильно совокупности двух систем: $\begin{cases} x<0, \\ x-3>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x>0, \\ x-3<0. \end{cases}$

Первая система сводится к системе $\begin{cases} x<0, \\ x>3, \end{cases}$ которая не имеет решений.

Вторая система равносильна системе $\begin{cases} x>0, \\ x<3, \end{cases}$ решением которой является интервал $(0; 3)$. Таким образом, решением совокупности будет объединение пустого множества и интервала $(0; 3)$, т. е. промежуток $(0; 3)$ (рис. 51).

Рис. 51

Заметим, что если $a < b$, то решением каждого из равносильных неравенств $(x - a)(x - b) < 0$, $\frac{x-a}{x-b}<0$ и $\frac{x-b}{x-a}<0$ является система $\begin{cases} x>a, \\ x<b, \end{cases}$ равносильная двойному неравенству $a < x < b$.

Приведём примеры решения совокупностей неравенств и неравенств, приводящих к системам и совокупностям неравенств.

Пример 1. Решим совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} 2-3x>x, \\ \frac{3-2x}{5}<\frac{1-x}{2}. \end{array}\right.$

Переходя от каждого неравенства к равносильному ему неравенству, получим:

$$\left[\begin{array}{l} 4x<2, \\ 2(3-2x)<5(1-x), \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4x<2, \\ 6-4x<5-5x, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x<0{,}5, \\ x<-1. \end{array}\right.$$

Решением совокупности служат те значения x, которые меньше 0,5 (большего из чисел 0,5 и -1). Следовательно, решением совокупности является открытый числовой луч $(-\infty;\ 0{,}5)$ (рис. 52).

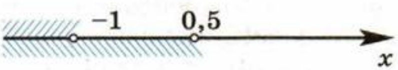


Рис. 52

Пример 2. Решим совокупность $\left[\begin{array}{l} 2x-3>1, \\ 3-2x>2(1-x). \end{array}\right.$

Имеем: $\left[\begin{array}{l} 2x>4, \\ 3-2x>2-2x, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x>2, \\ 0x>-1. \end{array}\right.$

Решением первого неравенства совокупности является открытый числовой луч $(2;\ +\infty)$, второе неравенство справедливо для любых значений $x \in \boldsymbol{R}$. Объединяя эти решения, получаем, что решением совокупности является любое действительное число.

Прежде чем рассмотреть следующий пример, заметим, что нестрогое неравенство есть сокращённая запись совокупности строгого неравенства и равенства. Например, неравенство $x \leqslant 2$ есть совокупность $\left[\begin{array}{l} x<2, \\ x=2. \end{array}\right.$ Поэтому часто при решении нестрогих неравенств поступают следующим образом: решают строгое неравенство, потом решают уравнение и решения объединяют. Рассмотрим пример.

Пример 3. Решим неравенство $\frac{2x-5}{5x+2} \leqslant 0$.

Данное неравенство равносильно совокупности неравенства $\frac{2x-5}{5x+2} < 0$ и уравнения $\frac{2x-5}{5x+2} = 0$. Решим сначала неравенство $\frac{2x-5}{5x+2} < 0$, заменив его равносильным ему неравенством $(2x - 5)(5x + 2) < 0$. Разделим обе части этого неравенства на положительные числа 2 и 5 и получим равносильное неравенство $(x - 2,5)(x + 0,4) < 0$. Решением этого неравенства служит интервал $(-0,4;\ 2,5)$.

Теперь решим уравнение $\frac{2x-5}{5x+2} = 0$. Очевидно, числитель равен нулю при $x = 2,5$, и при этом значении переменной знаменатель отличен от нуля. Следовательно, решением этого уравнения является число 2,5.

Итак, исходное неравенство $\frac{2x-5}{5x+2} \leqslant 0$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} -0,4 < x < 2,5, \\ x = 2,5, \end{array}\right.$ т. е. решением данного неравенства является полуинтервал $(-0,4;\ 2,5]$.

Упражнения

1058. Является ли решением совокупности $\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x < 0, \\ 2x \geqslant 4 \end{array}\right.$ число:

а) -2; в) 2;
б) 0; г) 12?

1059. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > -1; \end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l} x \leqslant 2, \\ x > 5; \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} x < 3, \\ x \leqslant -1; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} x \geqslant -2, \\ x \geqslant 12. \end{array}\right.$

1060. Найдите решения совокупности неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x - 2 < 0, \\ 2x \geqslant 4; \end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l} 2x > x - 1, \\ x + 1 \geqslant 0; \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} 2x < 4, \\ 2x \leqslant x + 2; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > -1. \end{array}\right.$

1061. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}\frac{3-x}{3}+1\leqslant\frac{2x-1}{5},\\ 5x-4<x-1;\end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l}\frac{2-3x}{3}<\frac{1-x}{2},\\ 2x+1<3x-4;\end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l}\frac{2x+1}{2}-1<\frac{2-x}{7},\\ -3x-2<x-1;\end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l}\frac{3x-2}{4}>\frac{1-5x}{6},\\ 3x-1\leqslant 3-2x.\end{array}\right.$

1062. Найдите все значения x, удовлетворяющие условию:

а) $\begin{cases}-2<3x-5<19,\\ \left[\begin{array}{l}3x-1<5,\\ 3x-5>x+7;\end{array}\right.\end{cases}$ б) $\begin{cases}-3<2x-1<7,\\ \left[\begin{array}{l}3x+2\leqslant x,\\ 2x-1\geqslant x+2;\end{array}\right.\end{cases}$ в) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1<2x-1<5,\\ 2\leqslant 3x-1<11,\end{cases}\\ \begin{cases}10\leqslant 4x-2<26,\\ 3<2x-1<11.\end{cases}\end{array}\right.$

1063. Решите неравенство:

а) $(x-3)(x+5)>0;$ в) $\frac{x-3}{x-4}<0;$

б) $(2-x)(x+10)<0;$ г) $\frac{x+1}{7-x}<0.$

1064. Найдите решение неравенства:

а) $(2x+3)(3x-2)\leqslant 0;$ в) $\frac{0{,}5x+2}{2x-1}\leqslant 0;$

б) $(2-5x)(3-2x)\geqslant 0;$ г) $\frac{2-7x}{2x-7}\geqslant 0.$

1065. Найдите все натуральные решения неравенства:

а) $x^2-7x<0;$ в) $7-x^2>0;$

б) $x^2-4x+3\leqslant 0;$ г) $5+4x-x^2\leqslant 0.$

1066. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{x^2-7x+10};$ в) $y=\frac{2x-1}{\sqrt{10+3x-x^2}};$

б) $y=\sqrt{15+2x-x^2};$ г) $y=\frac{2x^2-8}{\sqrt{10+x^2}}.$

1067. Используя введение новой переменной, решите неравенство:

а) $(x^2+2x-3)(x^2+2x)>0;$ б) $(x^2+3x+2)(x^2+3x)<0.$

1068. Для каждого a решите неравенство:

а) $x^2+ax<0;$ в) $(x-1)(x-a)>0;$

б) $x^2-ax\geqslant 0;$ г) $(x+2)(x-a)\leqslant 0.$

Упражнения для повторения

1069. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$; б) $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$; в) $\frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$; г) $\frac{7-4\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.

1070. Решите уравнение:

а) $|x - 2| - (x - 2)^2 + 2 = 0$;

б) $|x + 1| + (x + 1)^2 - 2 = 0$.

1071. В Стране дураков Буратино узнал, что в местном обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

1) лиса Алиса за 3 золотых монеты отдавала 4 серебряных и одну медную;
2) за 7 серебряных монет кот Базилио давал 4 золотых и одну медную. У Буратино были только серебряные монеты. После нескольких финансовых операций, совершённых в обменном пункте, у Буратино не появилось ни одной золотой монеты, количество серебряных монет уменьшилось и прибавилось 42 медных монеты. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Буратино?

44. Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля

Рассмотрим приёмы решения простейших неравенств с переменной под знаком модуля.

Простейшие неравенства вида $|x - a| < b$ или $|x - a| > b$, где a и b — некоторые числа, причём $b > 0$, можно решать, используя геометрические представления. Как известно, расстояние между точками координатной прямой равно модулю разности координат этих точек. Поэтому задачу решить неравенство $|x - a| < b$ можно сформулировать иначе: найти координаты точек координатной прямой, расстояние от которых до точки с координатой a меньше b (рис. 53)

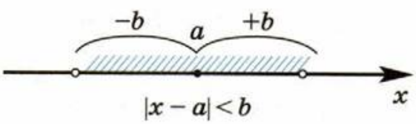


Рис. 53

Пример 1. Решим неравенство

$$|x - 1| < 5.$$

На координатной прямой от точки с координатой 1 на 5 единиц удалены точки с координатами −4 и 6, а менее чем на 5 единиц — точки, заключённые между ними (рис. 54).

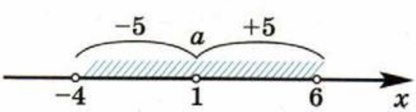


Рис. 54

Следовательно, искомое множество есть интервал (−4; 6).

Пример 2. Решим неравенство $|x+1| \geqslant 3$.

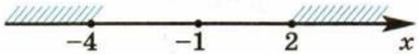


Рис. 55

Запишем неравенство в виде $|x-(-1)| \geqslant 3$ и вновь воспользуемся геометрическим смыслом модуля. На координатной прямой от точки −1 на 3 единицы удалены точки −4 и 2 (рис. 55).

Точки координатной прямой, удалённые от точки −1 на расстояние, не меньше чем на 3 единицы, лежат на одном из числовых лучей: либо на числовом луче $(-\infty; -4]$, либо на луче $[2; +\infty)$, а решением неравенства служит объединение этих числовых промежутков: $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$.

Основной приём решения неравенств с переменной под знаком модуля состоит в том, чтобы, используя определение и свойства модуля, освободиться от знака модуля, заменяя неравенство равносильным ему неравенством, системой неравенств или совокупностью неравенств.

Рассмотрим неравенства вида $|f(x)| < b$ или $|f(x)| > b$, где b — некоторое число.

Если $b < 0$, то неравенство $|f(x)| < b$ не имеет решений, а неравенство $|f(x)| > b$ верно при любом значении x, т. е. его решением является числовая прямая $(-\infty; +\infty)$.

Если $b > 0$, то неравенство $|f(x)| < b$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < b, \\ f(x) > -b, \end{cases}$$

т. е. двойному неравенству $-b < f(x) < b$, а неравенство $|f(x)| > b$ равносильно совокупности неравенств $f(x) < -b$ или $f(x) > b$. Это обусловлено тем, что при $b > 0$ модуль меньше b имеют числа, принадлежащие интервалу $(-b; b)$, а модуль больше b имеют числа, находящиеся вне этого промежутка.

И, наконец, если $b = 0$, то неравенство $|f(x)| < b$ не имеет решений, а неравенство $|f(x)| > b$ верно для любых значений x, для которых $f(x) \neq 0$.

Пример 3. Решим неравенство $|x^2 - 5x| > 6$.

Данное неравенство равносильно совокупности двух неравенств $x^2 - 5x < -6$ или $x^2 - 5x > 6$. Решением первого неравенства является интервал $(2; 3)$, решением второго — объединение двух открытых числовых лучей $(-\infty; -1)$ и $(6; +\infty)$, а решением исходного неравенства — объединение всех трёх промежутков: $(-\infty; -1) \cup (2; 3) \cup (6; +\infty)$.

Заметим, что при решении неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, иногда бывает полезным воспользоваться некоторыми свойствами модуля. Например, для любого действительного значения переменной a справедливо равенство $|a| = |-a|$, поскольку расстояние от точки с координатой a на координатной прямой до начала координат равно расстоянию от точки с координатой $-a$ до начала отсчёта (эти точки симметричны относительно начала координат и, следовательно, равноудалены от центра симметрии). Из этого свойства следует, что $|x-a| = |a-x|$.

Упражнения

1072. Найдите, при каких значениях x расстояние между точками $A(x)$ и $B(8)$:
а) меньше 4; б) больше 3; в) не меньше 1; г) не больше 5.

1073. Используя геометрический смысл модуля, решите неравенство:
а) $|x - 7| < 4$; в) $|1 - x| \leqslant 23$; д) $|x + 17| < -2$;
б) $|x + 5| > 6$; г) $|32 - x| \geqslant 1$; е) $|17 - x| > -1$.

1074. Найдите множество значений a, при которых для любых значений x верно неравенство:
а) $|2 - x| > 2a - 1$; б) $|7{,}2 + x| > 1{,}5 - 3a$.

1075. При каких значениях a для любых значений x не имеет решения неравенство:
а) $|x + 1| < a + 3$; б) $|23 - x| < 1{,}5 - 5a$?

1076. Решите неравенство:
а) $|3x - 2| \geqslant 3{,}4$; в) $|22 - 3x| < 8$;
б) $|12x - 1| > 17$; г) $|16 - 7x| \leqslant 2$.

1077. Решите двойное неравенство:
а) $1 < |3x - 8| < 5$; в) $1 \leqslant |2x - 11| \leqslant 5$;
б) $2 < |7 - 5x| < 12$; г) $3 \leqslant |15 - 2x| \leqslant 7$.

1078. При каких значениях a всякое решение двойного неравенства $3 < |x - 2| < 4$ является решением неравенства $x + 2a < 0$?

1079. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} |x-3| \leqslant 2, \\ |3-2x| \leqslant 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x+4| > 2, \\ |3{,}5-2x| < 0{,}5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} |2x-5| < 5, \\ |5x+1| < 21; \end{cases}$ г) $\begin{cases} |3x-1| \leqslant 7, \\ |7-x| \leqslant 2. \end{cases}$

1080. Решите неравенство:
а) $|x^2 + 1| > 2$; в) $|x^2 - 2x| < 6$;
б) $|x^2 - 2x| < 3$; г) $|x^2 + x - 1| > 1$.

1081. Найдите все целые решения неравенства:
а) $|x^2 - 3| < 6$; в) $|x^2 + 4x| < 5$;
б) $|x^2 - 8| < 7$; г) $|x^2 - x| < 6$.

1082. Решите неравенство, воспользовавшись введением новой переменной:

а) $x^2 + |x| - 6 < 0$; б) $x^2 - 2|x| - 8 > 0$.

Упражнения для повторения

1083. Из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 110 км от пункта A, выехал автомобиль. Через 0,2 ч после этого вслед за ним выехал мотоциклист, который, догнав автомобиль, немедленно повернул обратно. Двигаясь в обратном направлении с той же скоростью, мотоциклист возвратился в пункт A в тот момент, когда автомобиль прибыл в пункт B. Какова скорость автомобиля, если скорость мотоцикла была равна 60 км/ч?

1084. Какая из двух дробей ближе расположена к единице: правильная $\frac{a}{b}$ или неправильная $\frac{b}{a}$, где $0 < a < b$?

1085. При каком значении параметра a уравнение $ax^2 - (a + 1)x + 2a - 1 = 0$ имеет только один корень?

? Контрольные вопросы и задания

1. Что называется решением неравенства с одной переменной? Является ли решением неравенства $2x - 3 > 4$ число 5; число 3? Что значит решить неравенство?

2. Какое неравенство называется линейным неравенством с одной переменной? Решите неравенство: $3x > 4$; $-2x > 6$; $0 \cdot x > -2$; $0 \cdot x < -5$.

3. Какие неравенства называются равносильными? Сформулируйте условия перехода от данного неравенства с одной переменной к равносильному неравенству. Приведите примеры равносильных неравенств.

4. Что называется решением системы неравенств с одной переменной? Что значит решить систему неравенств с одной переменной? На примере системы неравенств $\begin{cases} -0{,}8x < -2{,}4, \\ 3x - 4 < 12 \end{cases}$ разъясните, как решают систему двух неравенств с одной переменной.

5. Что называется решением совокупности неравенств с одной переменной? Что значит решить совокупность неравенств с одной переменной? На примере совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} 3x < 8, \\ -0{,}7x > 3{,}5 \end{array}\right.$ разъясните, как решают совокупность неравенств с одной переменной.

6. Объясните, как решаются неравенства вида $|f(x)| < b$ и $|f(x)| > b$, где b — положительное число; отрицательное число; нуль.

Дополнительные упражнения к главе 5

К параграфу 12

1086. Сравните значения выражений:

а) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ и $1+\sqrt{6}$; б) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ и $1+\sqrt{30}$.

1087. Сравните значения выражений:

а) $\sqrt{5}+\sqrt{15}$ и $\sqrt{20}$; в) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ и $\sqrt{11}$;

б) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; г) $\sqrt{3}+\sqrt{10}$ и $\sqrt{15}$.

1088. Докажите неравенство:

а) $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}<\sqrt{6}+6$; в) $\sqrt{6}+2>\sqrt{3}+2\sqrt{2}$;

б) $4\sqrt{3}+1>2\sqrt{6}+\sqrt{2}$; г) $4+2\sqrt{10}<\sqrt{5}+8\sqrt{2}$.

1089. Сравните значения выражений:

а) $\sqrt{8+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ и $1+\sqrt{7}$; б) $\sqrt{6-\sqrt{1+\sqrt{7}}}$ и $\sqrt{5}-1$.

1090. Докажите, что при любом $a > 0$ является отрицательным числом значение выражения:

$$\left(\frac{a-1}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}\right):\left(\frac{a^2+1}{a^2-1}-\frac{a^2-1}{a^2+1}\right).$$

1091. Докажите, что при любом $a > 1$ является положительным числом значение выражения:

$$\frac{a^2+4a+4}{a-3}\cdot\left(\frac{1}{a-1}+\frac{3}{a-a^2}\right).$$

1092. Докажите, что если $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$, то

$$0<\frac{a+b}{1+ab}<1.$$

1093. Докажите неравенство:

а) $6x(x + 8) - (5x - 27)(x + 17) > 0$;

б) $(4x - 1)(4x + 1) - 16(x - 8) > 0$;

в) $x^3 - 6x + 18 > x(x - 2)(x + 1)$;

г) $x^2(x^2 - 4) - x^2(x + 6)(x - 6) > -68$.

9 Алгебра. 8 кл.

1094. Докажите неравенство, используя выделение квадрата двучлена:

а) $x^2 - x + 3 > 0$;
б) $a^2 + ab + b^2 \geqslant 0$;
в) $a^2 - ab + b^2 > 0$;
г) $y^2 - 0{,}6y + 0{,}11 > 0$.

1095. Докажите, что из всех прямоугольников, периметр которых равен 80 см, наибольшую площадь имеет квадрат.

1096. Моторная лодка прошла в первый день некоторое расстояние по реке и вернулась обратно. Во второй день она прошла такое же расстояние по другой реке и вернулась обратно. Скорость течения первой реки v_1 км/ч, а второй — v_2 км/ч, причём $v_1 < v_2$. В какой из дней лодка затратила на весь путь больше времени?

1097. Два пешехода отправились одновременно из пункта A в пункт B. Один из них шёл с постоянной скоростью, другой половину пути шёл со скоростью на 0,5 км/ч большей, а вторую половину — со скоростью на 0,5 км/ч меньшей скорости первого. Кто из них раньше пришёл в пункт B?

1098. Докажите неравенство:

а) $a^2 + b^2 > 2(a + b) - 2$;

б) $a^2b^2 - ab \geqslant -\frac{1}{4}$;

в) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2a(b + c) - a^2$;

г) $\frac{(a+b)^2}{8} \geqslant \frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}$;

д) $a^2 - 4a + 12 > 4b - b^2$.

1099. Докажите, что при положительных значениях переменных верно неравенство:

а) $\frac{a^4 + 6a^2b^2 + b^4}{a^2 + b^2} \geqslant 4ab$;

б) $\frac{ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c)}{abc} \geqslant 6$.

1100. Докажите, что при $a > 0$ и $b > 0$ верно неравенство:

а) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\sqrt{ab} \geqslant 2$;

б) $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$;

в) $a\sqrt{b} + b\sqrt{a} \leqslant a\sqrt{a} + b\sqrt{b}$.

1101. Докажите неравенство:

а) $(a+1)(b+1)(c+1) \geqslant 8\sqrt{abc}$ при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$;

б) $(a+1)(b+1)(a+c)(c+b) \geqslant 16abc$ при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

1102. Докажите, что если $a + b + c = 1$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5.$$

К параграфу 13

1103. Решите неравенство:

а) $-\frac{x}{2} < 3(2-x) - \frac{3+x}{4}$;

б) $-3(x+8) - 2\left(\frac{x}{3} - 1\right) < 0$;

в) $-(2x+1)^3 + 8x^2(x+1{,}5) < 0{,}5x - 2$;

г) $-\left(\frac{x}{4} + \frac{x}{3}\right) > \frac{x+6}{12} - 1$;

д) $-\frac{x+0{,}4}{4} > \frac{0{,}3x}{2} - 0{,}6$;

е) $\frac{(0{,}2x-3)^2}{4} - \frac{(0{,}1x-1)(0{,}2x-1)}{2} < x$.

1104. Найдите наибольшее целое число, при котором верно неравенство:

а) $2x + 1 - \frac{1}{6}(3x - 5) < 0$;

б) $\frac{1}{2}(3x - 1) + \frac{x}{5} < x + 0{,}1$;

в) $5 - \frac{3-2x}{12} > x - \frac{x}{4}$;

г) $-\frac{x-8}{6} > \frac{2x-1}{4} - 0{,}5x$.

1105. Найдите наименьшее целое число, при котором верно неравенство:

а) $12 - \frac{1}{3}\left(15 - \frac{x}{4}\right) < x$;

б) $\frac{5}{6}x - \frac{x-4}{4} > 0$;

в) $20 < \frac{2}{3}(6x-2) - \frac{1}{2}(2+x)$;

г) $8 - \left(\frac{x-1}{4} + \frac{x}{3}\right) < x$.

1106. Решите относительно x уравнение

$$3x + 2a = 8(x - 5) + 5a$$

и найдите, при каких значениях a корнем уравнения является:

а) положительное число;

б) отрицательное число.

1107. Найдите множество решений неравенства:

а) $2 \cdot \frac{1,5x + 6,25}{5} \leqslant 2x - \frac{6x - 18}{15}$, принадлежащих промежутку $[-1,5;\ 1,5]$;

б) $3 \cdot \frac{0,5x - 1}{4} - \frac{x}{8} \leqslant 0,3x$, принадлежащих промежутку $[-18;\ 0]$.

1108. Найдите множество положительных решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} 3(2x-1) - 2(x+1) < 3x, \\ x^2 - (x+6)(x-1) < 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x(x-2) - (2x-4)(3x-1) < x, \\ x - \frac{x-2}{4} > 3x. \end{cases}$

1109. Найдите множество отрицательных решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} \frac{x-0,2}{2} - \frac{x+0,4}{4} - 1 < 0, \\ (x-4)(4+x) - 11x < x^2 + 5x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 12x^2(3x+4)(4x-1) < 8, \\ \frac{x-2}{4} - x < 3(2-x). \end{cases}$

1110. Найдите множество значений x, при которых:

а) значение двучлена $0,5x - 5$ принадлежит промежутку $[-3;\ 3]$;

б) значение двучлена $2 - 0,1x$ находится вне промежутка $[-4;\ 4]$.

1111. При каких значениях x значения функции $y = 0,5x - 1,5$:

а) принадлежат промежутку $[-2,5;\ 1,5]$;

б) находятся вне промежутка $[-1,5;\ 3,5]$?

1112. Из числового промежутка $(-1;\ 4)$ выделите подмножество значений x, при которых двучлен $0,2 + 0,3x$ принимает большее значение, чем двучлен $1,2 - 0,1x$.

1113. Из числового промежутка $[-2;\ 5]$ выделите подмножество значений x, при которых дробь $\frac{0,2x^2 + x - 1}{6}$ принимает меньшее значение, чем дробь $\frac{0,4x^2 - 3}{12}$.

1114. Решите систему:

а) $\begin{cases} 0 < 3 + 2x < 1, \\ 6x + 11 < 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 < 1 - x < 3, \\ 3 - 2x > 4x. \end{cases}$

1115. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 0,3(x+2) - \frac{1}{3}x < 0,8, \\ (x-0,1)(x+1,3) - x^2 > 2,27, \\ |3x - 7| < 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (3x+1)(2x+6) - 6x^2 < x + 4, \\ 5(2x-0,1) - 9x < 0, \\ |0,6 - 2x| < 0,4. \end{cases}$

1116. Решите двойное неравенство:

а) $3 < |x| < 4$;
б) $2 < |x - 1| < 3$;
в) $1 \leqslant |1 - 2x| \leqslant 3$;
г) $2 \leqslant |2 - 3x| \leqslant 5$.

1117. Найдите все целые числа, удовлетворяющие двойному неравенству

$$1{,}5 < |2x - 1| < 5{,}2.$$

1118. При каких значениях a не имеет решений система неравенств:

а) $\begin{cases} 5(2x - a) < 4x + 5, \\ 3 + 4x > x + 2a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2(x - a) < x - 8, \\ 3(x - 2a) > x - 4? \end{cases}$

1119. Укажите какие-либо значения a и b при которых множеством решений системы $\begin{cases} 5x - b \geqslant 4, \\ ax - 2 \leqslant b \end{cases}$ является:

а) пустое множество;
б) числовой промежуток $[2; 4]$;
в) числовой промежуток $[3; +\infty)$.

1120. При каком значении a решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = a - 1, \\ 3x - y = a \end{cases}$$

является пара положительных значений x и y?

1121. При каких значениях a решением системы уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = 8a, \\ 3x + y = a + 6 \end{cases}$$

является пара отрицательных значений x и y?

1122. При каких значениях a не имеет решений система неравенств:

а) $\begin{cases} \frac{3x}{4} - \frac{2 - x}{2} > 1, \\ \frac{1}{3}(x - 4) < 2x - 1, \\ 0{,}5(x - 4) > x + a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{6x - 2}{3} < 2 - \frac{1 + 2x}{3}, \\ 0{,}2(x - 1) > x - \frac{1}{3}, \\ 6(2x - 1) > 3x + a? \end{cases}$

1123. При каких значениях a имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{\frac{1{,}2a + 6}{a}}$; б) $\frac{\sqrt{-3 - 2a}}{a + 4}$?

1124. Решите неравенство:

а) $(x + 3)(x - 4) < 0$; в) $\frac{3x+3}{2x-4} \leqslant 0$;

б) $(x + 3)(4 - x) \leqslant 0$; г) $\frac{4x-4}{3+1{,}5x} \geqslant 0$.

1125. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x-1>\frac{x}{3}; \\ \frac{x}{2}-1<x \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x-1 \geqslant 1-x \\ x-1 \leqslant \frac{x+1}{2}. \end{array}\right.$

1126. При каком значении a решением совокупности $\left[\begin{array}{l} 2x-3 \leqslant -x, \\ x-2<a \end{array}\right.$ является любое число?

1127. Укажите множество допустимых значений x в выражении:

а) $\sqrt{1-|2x-3|}$; в) $\sqrt{15-|3x-6|}$;

б) $\frac{\sqrt{4-|3x-4|}}{x}$; г) $\frac{\sqrt{8-|7-5x|}}{x-1}$.

1128. Если из половины некоторого натурального числа вычесть его треть, то разность будет меньше 6, а если к $\frac{2}{3}$ этого числа прибавить $\frac{1}{5}$ его часть, то сумма будет больше 26. Найдите это натуральное число.

1129. Из пункта A вышел пешеход. Одновременно вслед ему из пункта B, удалённого от A на 45 км, выехал велосипедист, скорость которого в 3,5 раза больше скорости пешехода. Через 3 ч велосипедист ещё не догнал пешехода, а через 4 ч оказалось, что он уже перегнал пешехода. Какой могла быть скорость пешехода?

1130. Решите неравенство:

а) $|x - 2| < 2$; в) $\frac{1}{|x+3|} < \frac{1}{2}$;

б) $|2 - x| \geqslant 1$; г) $\frac{1}{|1-x|} \geqslant 0{,}2$.

1131. Найдите все целые числа, удовлетворяющие двойному неравенству $2 < |x^2 - x| < 12$.

Глава 6 Степень с целым показателем

В этой главе будет дано определение степени с целым показателем. Это позволит записывать числа в стандартном виде, что часто используется в физике, химии и других естественно-научных дисциплинах. Будет показано, что свойства степени с целым показателем совпадают со свойствами степени с натуральным показателем.

§ 14. Степень с целым показателем и её свойства

45. Определение степени с целым отрицательным показателем

До сих пор мы изучали лишь степени с целым неотрицательным показателем. В дальнейшем будем рассматривать и степени, в которых показатель может быть целым отрицательным числом, т. е. расширим понятие степени, рассматривая степени с любым целым показателем.

Вам известно, какой смысл имеет выражение a^n, когда n — натуральное число или нуль:

если n — натуральное число, большее 1, и a — любое число, то

$$a^n = \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ раз}};$$

если $n = 1$ и a — любое число, то

$$a^n = a, \text{ т. е. } a^1 = a;$$

если $n = 0$ и $a \neq 0$, то

$$a^n = 1, \text{ т. е. } a^0 = 1.$$

Вам известны также свойства степени с целым неотрицательным показателем:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \tag{1}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ где } a \neq 0 \text{ и } m \geqslant n, \tag{2}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \tag{3}$$

$$(ab)^n = a^n b^n. \tag{4}$$

На эти свойства для нулевого показателя накладывается ограничение на основание степени a, т. е. $a \neq 0$.

Кроме того, при изучении дробей было доказано свойство:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \tag{5}$$

где a и b — любые числа, причём $b \neq 0$, $n \in N$.

Введём теперь понятие степени с целым отрицательным показателем. При этом новое определение должно быть таким, чтобы свойства степени с натуральным и нулевым показателем сохранили силу и для степеней с целым отрицательным показателем.

Рассмотрим выражение $2^3 : 2^7$.

К этому частному мы не можем применить правило деления степеней с одинаковыми основаниями, так как это правило согласно свойству $a^m : a^n = a^{m-n}$ имеет место, когда $m \geqslant n$.

Если это правило распространить на случай, когда $m < n$, то, применив его к частному $2^3 : 2^7$, получим выражение $2^3 : 2^7 = 2^{3-7} = 2^{-4}$, не имеющее смысла, так как степень определена пока только для натурального и нулевого показателя.

Однако, если частное $2^3 : 2^7$ преобразовать обычным известным нам способом:

$$2^3 : 2^7 = \frac{2^3}{2^7} = \frac{2^3 : 2^3}{2^7 : 2^3} = \frac{1}{2^{7-3}} = \frac{1}{2^4},$$

то получим дробь, имеющую определённый смысл.

Сопоставляя равенства $2^3 : 2^7 = 2^{-4}$ и $2^3 : 2^7 = \frac{1}{2^4}$, приходим к выводу, что выражение 2^{-4} целесообразно считать числом, обратным степени того же основания с противоположным показателем, т. е. дробью $\frac{1}{2^4}$.

Такое определение и принимается для степеней с целыми отрицательными показателями и любыми основаниями, отличными от нуля.

Определение. **Если n — целое отрицательное число и $a \neq 0$, то**

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

По определению имеем:

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01; \qquad (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16};$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{1}{-\frac{1}{27}} = -27; \qquad \left(\frac{2}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{7}} = \frac{7}{2}.$$

Заметим, что выражение 0^n, где n — целое отрицательное число, не имеет смысла.

Упражнения

1132. Представьте степень в виде дроби:

а) 3^{-2}; в) 7^{-1}; д) 27^{-2};
б) 5^{-3}; г) 9^{-4}; е) 81^{-1}.

1133. Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем:

а) $\frac{1}{2^8}$; в) $\frac{1}{10^3}$; д) $\frac{1}{125^2}$;
б) $\frac{1}{3^6}$; г) $\frac{1}{9^5}$; е) $\frac{1}{36^4}$.

1134. Представьте степень в виде дроби:

а) 13^{-3}; б) 15^{-2}; в) 25^{-3}; г) 37^{-4}.

1135. Представьте дробь в виде степени с целым показателем:

а) $\frac{1}{9^2}$; в) $\frac{1}{2^{-8}}$; д) $\frac{1}{5^{-2n}}$;
б) $\frac{1}{6^{-3}}$; г) $\frac{1}{3^n}$; е) $\frac{1}{4^{2n}}$.

1136. Представьте последовательность чисел:

а) $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 4; 8; 16 в виде последовательности степеней с основанием 2;

б) 1000; 100; 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 в виде последовательности степеней с основанием 10.

1137. Замените числа, входящие в последовательность

$$5^{-4},\quad 5^{-3},\quad 5^{-2},\quad 5^{-1},\quad 5^0 \cdot 2^{-1},\quad 5 \cdot 2^{-2},\quad 5^2 \cdot 2^{-3},\quad 5^3 \cdot 2^{-4},$$

десятичными дробями.

1138. Найдите значение выражения:

а) 7^{-2}; в) $(-2)^{-6}$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$; ж) $(-1)^{-10}$; и) $1{,}5^{-2}$;
б) 8^{-3}; г) $(-2)^{-5}$; е) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$; з) $(-1)^{-13}$; к) $2{,}5^{-3}$.

1139. Вычислите:

а) -3^{-4}; в) $-(-5)^{-2}$; д) $2^{-1} + 3^{-1}$; ж) $3^{-2} + 3^{-3}$;
б) $(-2)^{-4}$; г) $(-2)^{-5}$; е) $2^{-2} - 3^{-2}$; з) $5^{-2} - 4^{-2}$.

1140. Найдите значение выражения:

а) $7 \cdot 5^{-2} + 12 \cdot 10^{-2}$;

б) $5 \cdot 3^{-3} - 6 \cdot 9^{-2}$;

в) $7 \cdot 6^{-2} - 4 \cdot \left(\frac{9}{17}\right)^{-1}$;

г) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{14}\right)^{-1}$.

1141. Докажите, что при любом целом n:

а) если $a > 0$, то $a^n > 0$;

б) если $a < 0$, то $a^n > 0$ при чётном n и $a^n < 0$ при нечётном n;

в) если $a \neq 0$, то a^{-n} и a^n — взаимно обратные выражения.

1142. Верно ли неравенство $a^n > a^{-n}$, если:

а) $a > 1$ и $n \in N$;

б) $0 < a < 1$ и $n \in N$?

1143. Представьте выражение в виде дроби, не содержащей степени с отрицательным показателем:

а) $2ab^{-4}$; в) $ab^{-1}c^{-1}$; д) $a(b + c)^{-1}$; ж) $\frac{a^{-2}b^{-2}}{c^2}$;

б) $3x^{-2}y^2$; г) $(-3)^{-2}x^3y^{-4}$; е) $\frac{(x+a)^{-2}}{y^{-1}}$; з) $\frac{(x^2-y^2)^{-1}}{(x+y)^{-2}}$.

1144. Используя отрицательный показатель, представьте дробь в виде произведения:

а) $\frac{x^2}{y^2}$; в) $\frac{5a}{c^6}$; д) $\frac{(a+2)^2}{(b-2)^2}$; ж) $\frac{5a^3}{(a-1)^3(a+1)^3}$;

б) $\frac{a^2}{b^4}$; г) $\frac{1}{x^5y^5}$; е) $\frac{6x}{y^2(x-y)^{-1}}$; з) $\frac{7b^2}{(b+2)^2(b-2)^2}$.

1145. Представьте в виде дроби:

а) $a^{-1} + b^{-1}$; г) $cd - c^{-2}d^{-2}$;

б) $x^{-2} - y^{-2}$; д) $xy^{-2} + x^{-2}y$;

в) $ab^{-1} + a^{-1}b$; е) $a^2b^{-4} - a^{-4}b^2$.

Упражнения для повторения

1146. Найдите значение выражения:

$$\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}-\frac{a}{b-a}\right):\frac{b}{a+5}$$

при $a = 0{,}18$, $b = 0{,}37$.

1147. Постройте в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = 1$. Найдите координаты точек пересечения этих графиков.

1148. Одна сторона прямоугольника на 6 см больше другой его стороны. Если большую сторону уменьшить в 2 раза, а меньшую увеличить на 2 см, то периметр прямоугольника уменьшится на 6 см. Найдите стороны данного прямоугольника.

46. Свойства степени с целым показателем

Сформулируем и докажем свойства степени с целым показателем.

Для любого $a \neq 0$ и целых m и n выполняются тождества:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (1)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \quad (3)$$

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого n выполняются тождества:

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad (5)$$

Их доказательство опирается на определение степени с целым отрицательным показателем, на свойства степени с натуральным и нулевым показателем, на правила умножения и деления дробей и основное свойство дроби.

Чтобы доказать, например, свойство (1), нужно рассмотреть три случая:

1) $m \geqslant 0$ и $n \geqslant 0$; 2) $m \geqslant 0$ и $n < 0$; 3) $m < 0$ и $n < 0$.

Доказательство, соответствующее первому случаю, было дано в курсе алгебры 7 класса.

Проведём доказательство для второго и третьего случаев.

Сначала способ доказательства проиллюстрируем на частном примере. Пусть $a \neq 0$, $m = 4$, $n = -6$. Имеем:

$$a^4a^{-6} = a^4 \cdot \frac{1}{a^6} = \frac{a^4}{a^6} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^{6-4}} = a^{-(6-4)} = a^{4-6} = a^{4+(-6)}.$$

Пусть $a \neq 0$, $m = -3$, $n = -5$.
Тогда

$$a^{-3}a^{-5} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^3a^5} = \frac{1}{a^{3+5}} = a^{-(3+5)} = a^{-3+(-5)}.$$

Заметим, что если $m = 0$, $n = -5$, то $a^0a^{-5} = 1 \cdot a^{-5} = a^{-5} = a^{0-5}$.

Теперь проведём доказательство свойства (1) в общем виде.
Пусть $a \neq 0$, $m \geqslant 0$, $n < 0$. Пусть также $n = -k$, где $k \in \boldsymbol{N}$.
Если $m > |n|$, то имеем:

$$a^m a^n = a^m a^{-k} = a^m \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{a^m}{a^k} = = a^m : a^k = a^{m-k} = a^{m+(-k)} = a^{m+n}.$$

Если $m < |n|$, то имеем:

$$a^m a^n = a^m a^{-k} = a^m \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{1}{a^{-m}a^k} =$$

$$= \frac{1}{a^{k-m}} = a^{-(k-m)} = a^{m-k} = a^{m+(-k)} = a^{m+n}.$$

Пусть $a \neq 0$, $m < 0$, $n < 0$.
Учитывая, что в этом случае $-m > 0$ и $-n > 0$, получим:

$$a^m a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m}a^{-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

Таким образом, свойство $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ доказано для любых целых показателей m и n.

Проведём доказательство свойства (2).
Пусть $a \neq 0$, m и n — любые целые числа. Обозначим $a^m : a^n = a^x$. Тогда по определению частного

$$a^x \cdot a^n = a^m.$$

Согласно тождеству (1) имеем:

$$a^{x+n} = a^m.$$

Отсюда при $a \neq 1$ следует, что $x + n = m$, $x = m - n$. Значит,

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Если $a = 1$, то при любых значениях показателей степеней свойство $a^m : a^n = a^{m-n}$ верно.
Докажем свойство (4).
Пусть $a \neq 0$, $b \neq 0$ и n — целое отрицательное число. Значит, $-n$ — целое положительное число. Имеем:

$$(ab)^n = \frac{1}{(ab)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = a^n b^n.$$

Аналогично можно доказать свойства (3) и (5).

Таким образом, действия над степенями с целыми показателями выполняются по тем же правилам, что и действия над степенями с натуральными показателями. При этом при делении степеней снимается ограничение, согласно которому показатель степени делимого должен быть не меньше показателя степени делителя (т. е. теперь показатели степеней делимого и делителя могут быть любыми целыми числами).

Пример 1. Представим в виде степени выражение $x^{-8}x^{10}$.

Применив свойство (1), получим:

$$x^{-8}x^{10} = x^{-8+10} = x^2.$$

Пример 2. Найдём значение выражения $(5^{-1})^{-6} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$.

Применив свойство (3) и определение степени с отрицательным показателем, получим:

$$(5^{-1})^{-6} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^6 : (5^{-1})^{-3} = 5^6 : 5^3 = 5^3 = 125.$$

Пример 3. Докажем, что значение выражения $(-8a^{-4})^3 : \left(-\frac{1}{4}a^3\right)^{-6}$ при любом a, отличном от нуля, является отрицательным числом.

Применяя свойства степени, получим:

$$(-8a^{-4})^3 : \left(-\frac{1}{4}a^3\right)^{-6} = (-2^3a^{-4})^3 : (-2^{-2}a^3)^{-6} =$$

$$= -2^9a^{-12} : (2^{12}a^{-18}) = -2^{-3}a^6 = -\frac{1}{8}a^6.$$

Степень a^6 при любом $a \neq 0$ — положительное число. Следовательно, $-\frac{1}{8}a^6 < 0$.

Упражнения

1149. Представьте в виде степени:

а) a^6a^{-3}; г) $x^6 : x^8$; ж) $(a^{-3})^4$;

б) $b^{-1}b^{-3}$; д) $y^4 : y^{-2}$; з) $(b^5)^{-2}$;

в) $c^{12}c^0$; е) $z^{-5} : z^{-3}$; и) $(c^{-8})^{-4}$.

1150. Найдите значение выражения:

а) $2^{-5} \cdot 2^6$; г) $5^3 : 5^5$; ж) $(3^{-2})^2$;

б) $3^{-6} \cdot 3^5$; д) $6^{-2} : 6^{-4}$; з) $(5^2)^{-1}$;

в) $7^{-2} \cdot 7^0$; е) $10^3 : 10^{-1}$; и) $(10^{-2})^{-3}$.

1151. Вычислите:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; в) $\left(-\frac{1}{8}\cdot 36\right)^{-2}$; д) $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)^{-2}$;

б) $(4\cdot 27)^{-1}$; г) $\left(-\frac{4}{9}\right)^{-1}$; е) $\left(7\cdot\frac{1}{4}\right)^{-1}$.

1152. Докажите тождество, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$:

а) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$; б) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

1153. Сравните a и a^{-1}, если:

а) $a > 1$; в) $-1 < a < 0$;

б) $0 < a < 1$; г) $a < -1$.

1154. Представьте выражение в виде степени с основанием 2:

а) $16\cdot 4^{-1}$; в) $8^{-2}\cdot 4^{4}$; д) $(32^{-3})^{3}$.

б) $\frac{1}{32}\cdot 4^{-2}$; г) $(16^{2})^{-3}$;

1155. Представьте выражение в виде степени с основанием 3:

а) $9^{2}\cdot(3^{4})^{-2}$; в) $(3^{5})^{-1}\cdot(9^{-2})^{3}$;

б) $(81^{-2})^{-1}\cdot 27^{2}$; г) $(27^{-2})^{4}\cdot(81^{3})^{2}$.

1156. Представьте число 3^{36} в виде степени с основанием:

а) 9; в) 81; д) $\frac{1}{9}$;

б) 27; г) $\frac{1}{3}$; е) $\frac{1}{27}$.

1157. Найдите значение m, зная, что верно равенство:

а) $5^{m}\cdot 5^{m+1} = 125$; г) $5^{2m}\cdot 5^{m+2} = 25^{7}$;

б) $5^{m}\cdot 5^{m+1} = 5^{7}$; д) $5^{2m}\cdot 25^{2m+1} = 25^{4}$;

в) $5^{m}\cdot 5^{m+1} = 5^{-7}$; е) $125^{m}\cdot 5^{m+3} = 125^{5}$.

1158. Найдите значение выражения:

а) $9^{-4}\cdot 27^{3}$; в) $(2^{-4}\cdot 4^{3})^{2}$; д) $(12^{2}\cdot 15^{-1})^{2}$;

б) $8^{6}\cdot 64^{-3}$; г) $(25^{-3}\cdot 5^{7})^{-1}$; е) $(35^{-2}\cdot 49^{2})^{-1}$.

1159. Представьте в виде десятичной дроби:

а) 10^{-2}; в) $24\cdot 10^{-3}$;

б) 10^{-4}; г) $3{,}5\cdot 10^{-5}$.

1160. Упростите выражение:

а) $2{,}5a^{-2}b^3 \cdot 8a^3b^{-2}$;

б) $2{,}4p^{-3}q^4 \cdot \frac{1}{6}p^3q^{-4}$;

в) $\frac{3}{4}m^6n^{-9} \cdot 1\frac{1}{3}m^4n^2$;

г) $\frac{1}{7}a^{2n-5}b^{3n+1} \cdot 2\frac{8}{17}a^{n+6}b^{1-2n}$;

д) $9\frac{3}{8}x^{2-n}y^{2n+3} \cdot 0{,}32x^{2n+2}y^{4-2n}$;

е) $4{,}86c^{5n+2}d^{8-n} \cdot 1\frac{7}{243}c^{-4n}d^{n-8}$.

1161. Представьте в виде произведения:

а) $(x^{-2}y^{-2})^{-1}$;

б) $(x^3y^{-4})^{-2}$;

в) $(0{,}1c^{-5}b^2)^{-3}$;

г) $(-3a^6b^{-8})^4$;

д) $(-0{,}5c^{-3}b^{-4})^{-3}$;

е) $\left(\frac{2}{3}c^5d^{-2}\right)^{-4}$;

ж) $(x^{-n}b^4)^{-4}$;

з) $(y^{-5}a^{-6})^{-2n}$;

и) $(c^{-2n}d^{3n})^{-1}$.

1162. Представьте произведение в виде степени:

а) $64a^{-3}$;

б) $0{,}0001b^6$;

в) $\frac{1}{128}x^{14}y^{21}$;

г) $100^{-3}x^{18}y^{-24}$;

д) $7\frac{19}{32}c^{10n}d^{-5n}$;

е) $12{,}167a^{-9n}b^{12n}$.

1163. Представьте в виде дроби, не содержащей степени с отрицательным показателем:

а) $(a^{-2}b^2)^{-2} \cdot (a^4b^{-3})^3$;

б) $(a^7b^{-5})^3 \cdot (a^{-6}b^3)^5$;

в) $(0{,}01x^2y^{-3})^{-2} \cdot (5x^{-2}y^4)^{-3}$;

г) $(3^{-1}x^{-1}y^{-2})^{-4} \cdot (54x^4y^4)^{-2}$.

Упражнения для повторения

1164. Упростите выражение

$$\left(3a + 1 - \frac{1}{1-3a}\right) : \left(3a - \frac{9a^2}{3a-1}\right).$$

1165. Принадлежит ли графику функции $y = (x+5)^2 - (x-5)^2$ точка:

а) $A(0{,}005;\ 1)$;

б) $B\left(-\frac{1}{4};\ 5\right)$;

в) $C\left(-\frac{1}{5};\ -4\right)$?

1166. Решите уравнение:

а) $6x^{-1} + 9x^{-1} = 5$;

б) $\frac{10}{x-1} - 2(x-1)^{-1} = 4$.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение степени с целым показателем. Представьте выражение 7^{-15} в виде степени с положительным показателем.

2. Сформулируйте свойства произведения степеней, частного степеней и степени степени. Проведите доказательство свойства $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ для случая $m = -5$, $n = 7$.

3. Сформулируйте свойства степени произведения и степени дроби. Проведите доказательство одного из этих свойств для случая $n = -6$.

§ 15. Выражения, содержащие степени с целыми показателями

47. Преобразование выражений, содержащих степени с целыми показателями

В связи с введением степеней с целыми отрицательными показателями расширим понятие рационального выражения. Рациональным выражением будем теперь называть всякое выражение, которое составлено из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.

Такие выражения, как x^{-1}, $(a+b)^{-2}$, относятся к классу дробных рациональных выражений, так как $x^{-1} = \frac{1}{x}$, $(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2}$.

Рассмотрим примеры преобразований рациональных выражений, которые содержат степени с целыми показателями.

Пример 1. Упростим выражение:

а) $\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a+b}\right)^{-1}$;   б) $\frac{a^{-2}+a}{a^{-3}}$.

Имеем:

а) $\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a+b}\right)^{-1} = \frac{a+b}{a^{-1}+b^{-1}} = \frac{a+b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{a+b}{\frac{b+a}{ab}} = ab.$

б) Вынесем за скобки множитель a^{-3} в числителе дроби.

Имеем:

$$\frac{a^{-2}+a}{a^{-3}} = \frac{a^{-3}(a+a^4)}{a^{-3}} = a+a^4.$$

Пример 2. Представим выражение

$$(ab^{-2} + a^{-2}b)(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$$

в виде рациональной дроби.

Имеем:

$$(ab^{-2} + a^{-2}b)(a^{-1} + b^{-1})^{-1} = \left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{-1} = \frac{a^3 + b^3}{a^2b^2} \cdot \left(\frac{a + b}{ab}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2) \cdot ab}{a^2b^2(a + b)} = \frac{a^2 - ab + b^2}{ab}.$$

Пример 3. Упростим выражение

$$(x^2 + xy + y^2)(x^{-2} + x^{-1}y^{-1} + y^{-2})^{-1}.$$

Вынесем за скобки x^2y^2 в многочлене $x^2 + xy + y^2$ и продолжим преобразование:

$$(x^2 + xy + y^2)(x^{-2} + x^{-1}y^{-1} + y^{-2})^{-1} =$$

$$= x^2y^2(y^{-2} + x^{-1}y^{-1} + x^{-2})(x^{-2} + x^{-1}y^{-1} + y^{-2})^{-1} =$$

$$= x^2y^2(y^{-2} + x^{-1}y^{-1} + x^{-2})^0 = x^2y^2.$$

Пример 4. Найдём значение выражения

$$\frac{(2a - b + 1)^{-2} + 2(4a^2 - (b - 1)^2)^{-1} + (2a + b - 1)^{-2}}{(2a - b + 1)^2 + 2(4a^2 - (b - 1)^2) + (2a + b - 1)^2}$$

при $a = \frac{1}{4}$ и $b = -\frac{1}{2}$.

Сначала упростим выражение. Для этого введём подстановку: $2a - b + 1 = x$, $2a + b - 1 = y$. Тогда данное выражение примет вид:

$$\frac{x^{-2} + 2(xy)^{-1} + y^{-2}}{x^2 + 2xy + y^2}.$$

Выполним преобразования этого выражения:

$$\frac{x^{-2} + 2(xy)^{-1} + y^{-2}}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{(x^{-1} + y^{-1})^2}{(x + y)^2} = \left(\frac{x^{-1} + y^{-1}}{x + y}\right)^2 = \left(\frac{x^{-1} \cdot y^{-1}(y + x)}{x + y}\right)^2 =$$

$$= x^{-2}y^{-2} = \frac{1}{x^2y^2} = \frac{1}{(xy)^2}.$$

Произведём обратную замену и выполним вычисления:

$$\frac{1}{(xy)^2} = \frac{1}{((2a - (b - 1))(2a + (b - 1)))^2} = \frac{1}{(4a^2 - (b - 1)^2)^2} = \frac{1}{\left(4 \cdot \frac{1}{16} - \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{4} - \frac{9}{4}\right)^2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}.$$

Упражнения

1167. Представьте выражение в виде рациональной дроби:

а) $ab^{-1} + a^{-1}b$;
б) $(ab)^{-1} + (ab)^2$;
в) $a^{-1}(a^{-1} + b^{-1})$;
г) $b^2(a^{-2} - b^{-2})$;
д) $(a^{-1} + b^{-1})(a + b)^{-1}$;
е) $(a^{-1} + b)(a - b^{-1})$.

1168. Докажите тождество:

а) $(a^{-1}+b^{-1})^2 = \dfrac{(a+b)^2}{a^2b^2}$;
б) $(a^{-1}-b^{-1})^2 = \dfrac{(a-b)^2}{a^2b^2}$;
в) $(a^{-1}+b^{-1})^3 = \dfrac{(a+b)^3}{a^3b^3}$;
г) $(a^{-1}-b^{-1})^3 = \dfrac{(b-a)^3}{a^3b^3}$.

1169. Является ли тождеством равенство:

а) $(a + b)^{-2} = a^{-2} + 2a^{-1}b^{-1} + b^{-2}$;
б) $a^{-2} - b^{-2} = (a^{-1} + b^{-1})(a^{-1} - b^{-1})$?

1170. Представьте в виде рациональной дроби:

а) $(a^{-1} + b^{-1})^2 - (a^{-1} - b^{-1})^2$;
б) $(a^{-1} + b^{-1})^2 + (a^{-1} - b^{-1})^2$;
в) $(a^{-1} + b^{-1})^3 - (a^{-1} - b^{-1})^3$;
г) $(a^{-1} + b^{-1})^3 + (a^{-1} - b^{-1})^3$.

1171. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x+1}{x^{-1}+1}$;
б) $\dfrac{x^2-x+1}{x^{-2}-x^{-1}+1}$;
в) $\dfrac{y^{-1}-1}{y-1}$;
г) $\dfrac{y^{-4}+y^{-2}}{y^4+y^2}$;
д) $\dfrac{a^2+b^2}{ab^{-1}+a^{-1}b}$;
е) $\dfrac{a^{-4}+b^{-4}+2a^{-2}b^{-2}}{a^4+b^4+2a^2b^2}$.

1172. Докажите, что значение выражения $\dfrac{a^{-1}b^2-a^2b^{-1}}{a^{-3}-b^{-3}}$ является неотрицательным числом при всех допустимых значениях a и b.

1173. Докажите, что если $a + a^{-1} = b$, то $a^3 + a^{-3} = b^3 - 3b$.

1174. Упростите выражение:

а) $\dfrac{(a-b)^{-2}+2(a^2-b^2)^{-1}+(a+b)^{-2}}{(a+b)^2+2(a^2-b^2)+(a-b)^2}$;
б) $\dfrac{(x+y)(x-y)^{-1}+(x-y)(x+y)^{-1}-2}{(x+y)(x-y)^{-1}-(x-y)(x+y)^{-1}}$;
в) $\dfrac{1+(a+b)^{-1}}{1-(a+b)^{-1}}\cdot\dfrac{(a+b+1)^{-2}}{(a+b-1)^{-2}}$;
г) $\dfrac{(a-b)(1-(a+b)^{-1})}{(1-2a)(a^2-b^2)^{-1}+1}$;

д) $\dfrac{(a+b-1)^{-2}+(a-b+1)^{-2}}{2(a+b)(a^2-(b-1)^2)^{-2}}:\left(\dfrac{1}{a^{-2}}+\dfrac{1}{(b-1)^{-2}}\right)$;

е) $\dfrac{(n-1)(n+1)^{-2}-2n(n^2-1)^{-1}+(n+1)(n-1)^{-2}}{8n(n^4-1)^{-1}}$.

1175. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения не зависит от значений c и x:

а) $\dfrac{(c-x)^2-(c-x)^{-2}}{(c-x)^2-1}-(c-x)^{-2}$;   б) $\dfrac{3(c^2+cx+x^2)^{-1}-(c^2-cx+x^2)^{-1}}{(c-x)^2(c^4+c^2x^2+x^4)^{-1}}$.

Упражнения для повторения

1176. Докажите, что при любом целом значении n верно равенство:

а) $2^n+2^n=2^{n+1}$;   б) $3^n+3^n+3^n=3^{n+1}$.

1177. Постройте график функции $y=x^2$ и перечислите свойства этой функции.

1178. Известно, что точка $B(6;\ 2)$ принадлежит графику функции $y=kx+1$. Найдите k.

1179. Из формулы $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ выразите:

а) a через b и c;   б) b через a и c.

48. Стандартный вид числа

В физике, астрономии, технике часто приходится иметь дело с величинами, значения которых выражаются очень большими или очень малыми числами.

Например, масса Земли равна 5 970 000 000 000 000 000 000 т, а масса одного атома железа равна 0,0000000000000000000000927 г. Такие числа не только трудно читать, но о них даже трудно получить ясное представление, с ними неудобно выполнять вычисления. Поэтому очень большие и очень малые числа принято записывать в виде и $a\cdot10^n$, где a — число, заключённое между 1 и 10, а n — целое число. Такую запись называют стандартным видом числа.

Определение. Стандартным видом числа x называют запись этого числа в виде $a\cdot10^n$, где $1\leqslant a\leqslant10$ и $n\in Z$. Число a называют значащей частью числа x, а целое число n называют порядком этого числа.

Масса Земли в стандартном виде запишется так: $5{,}98 \cdot 10^{21}$ т, а масса одного атома железа — в виде $9{,}27 \cdot 10^{-23}$ г.

Порядок числа позволяет оценить, насколько велико или мало число. Он даёт возможность сравнивать большие или малые числа.

Например, известно, что масса Юпитера равна $1{,}90 \cdot 10^{24}$ т. Сравнивая её с массой Земли, мы можем сказать, что она на 3 порядка больше массы Земли. Это означает, что масса Юпитера приблизительно в 10^3, т. е. в 1000 раз, больше массы Земли.

Нетрудно понять, какой из этих «шумов» более вреден для человека. В акустике силу звука измеряют в единицах Вт/см^2. Сравним шорох листьев в лесу в тихую погоду (он оценивается как $1 \cdot 10^{-15}$ Вт/см^2) и шум на оживлённой городской улице ($1 \cdot 10^{-10}$ Вт/см^2). Из этого сравнения видно, что шум на городской улице на 5 порядков, т. е. в 100 000 раз, громче шороха листьев в лесу. Какой из этих «шумов» благоприятнее для человека, нетрудно сделать вывод. Заметим, что сила звука, равная $1 \cdot 10^{-3}$ Вт/см^2, вызывает у человека болевое ощущение.

Рассмотрим примеры записи числа в стандартном виде.

Пример 1. Представим в стандартном виде число $x = 63\,800\,000$.

Число x должно иметь вид $6{,}38 \cdot 10^n$. Поставив в числе x запятую после первой цифры 6 (6,3800000), мы тем самым отделили запятой 7 цифр справа, т. е. уменьшили число x в 10^7 раз. Поэтому x больше 6,38 в 10^7 раз. Значит,

$$x = 6{,}38 \cdot 10^7.$$

Пример 2. Запишем в стандартном виде число $x = 0{,}0000327$.

Число x должно иметь вид $3{,}27 \cdot 10^n$, т. е. в значащей части числа должна быть одна цифра, отличная от нуля. Переставив запятую на 5 знаков вправо, мы увеличили число в 10^5 раз. Поэтому число x меньше числа 3,27 в 10^5 раз. Значит,

$$x = 3{,}27 : 10^5 = 3{,}27 \cdot 10^{-5}.$$

Пример 3. Представим произведение $(9{,}5 \cdot 10^8) \cdot (1{,}38 \cdot 10^{-2})$ в стандартном виде числа.

Имеем:

$$(9{,}5 \cdot 10^8) \cdot (1{,}38 \cdot 10^{-2}) = (9{,}5 \cdot 1{,}38) \cdot (10^8 \cdot 10^{-2}) =$$
$$= 13{,}11 \cdot 10^6 = 1{,}311 \cdot 10^7.$$

Пример 4. Разделим $1{,}767 \cdot 10^5$ на $4{,}63 \cdot 10^{-3}$.

Имеем:

$$(1{,}767 \cdot 10^5) : (4{,}63 \cdot 10^{-3}) =$$
$$= \frac{1{,}767 \cdot 10^5}{4{,}63 \cdot 10^{-3}} = \frac{1{,}767}{4{,}63} \cdot \frac{10^5}{10^{-3}} \approx 0{,}3816... \cdot 10^8 \approx 3{,}82 \cdot 10^7.$$

Упражнения

1180. Укажите значащую часть и порядок числа, записанного в стандартном виде:

а) $3{,}7 \cdot 10^8$; б) $6{,}42 \cdot 10^{12}$; в) $9{,}1 \cdot 10^{-7}$; г) $5{,}46 \cdot 10^{-3}$; д) $8{,}37 \cdot 10$; е) $1{,}23 \cdot 10^{-1}$.

1181. Запишите в стандартном виде число и укажите значащую часть и порядок числа:

а) 76 000 000; б) 138 000 000 000; в) 20 300; г) 0,00384; д) 0,0000000027; е) 0,0307.

1182. Назовите порядок числа x, если:

а) $100 \leqslant x \leqslant 1000$; б) $10\,000 \leqslant x < 100\,000$; в) $0{,}01 \leqslant x < 0{,}1$; г) $0{,}0001 \leqslant x < 0{,}001$.

1183. Числа x и y можно записать в стандартном виде как $x = a \cdot 10^m$ и $y = b \cdot 10^{m+n}$. Во сколько раз число x больше или меньше числа y, если:

а) $n = 2$; б) $n = 5$; в) $n = -2$; г) $n = -6$?

1184. Выразите:

а) $4{,}2 \cdot 10^2$ т в граммах; б) $6{,}3 \cdot 10^3$ кг в граммах; в) $3{,}6 \cdot 10^{-2}$ г в килограммах; г) $1{,}28 \cdot 10^{-3}$ кг в тоннах; д) $2 \cdot 10^3$ г в тоннах; е) $4{,}2 \cdot 10^{-1}$ т в центнерах.

1185. Выразите время в секундах и запишите полученное число в стандартном виде:

а) 1 час; б) 1 сутки; в) 30 суток; г) 1 год.

1186. Выполните умножение:

а) $(6{,}25 \cdot 10^3)(2{,}6 \cdot 10^4)$; б) $(1{,}44 \cdot 10^5)(2{,}5 \cdot 10^{-2})$; в) $(7{,}2 \cdot 10^{-3})(1{,}4 \cdot 10^{-5})$; г) $(8{,}3 \cdot 10^{-7})(2{,}4 \cdot 10^3)$.

1187. Выполните деление:

а) $(6{,}24 \cdot 10^2) : (3{,}15 \cdot 10^5)$;
б) $(1{,}92 \cdot 10^{-8}) : (2{,}6 \cdot 10^{-2})$.

1188. Масса Земли $5{,}98 \cdot 10^{21}$ т, а масса воздуха, окружающего Землю, равна $5 \cdot 10^{15}$ т. На сколько порядков масса Земли больше массы окружающего её воздуха?

1189. Расстояние от Солнца до Земли $1{,}49 \cdot 10^8$ км. Скорость света равна $3 \cdot 10^5$ км/с. За какое время свет доходит от Солнца до Земли?

Упражнения для повторения

1190. Представьте в виде рациональной дроби выражение:

а) $(a^{-1} - b^{-1})^{-1} : (ab^{-1} - a^{-1}b)$;

б) $\frac{(a^{-2}+b^{-2})^2}{(a^2b^{-2}+1)^2}$.

1191. Постройте график функции $y = x^3$. Найдите:

а) значение функции, соответствующее значению аргумента x, равному: $\frac{1}{2}$, 1,5; 2,5;

б) множество значений x, при которых значение функции меньше 1, но больше -1; меньше $\frac{1}{8}$, но больше $-\frac{1}{8}$.

1192. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3-2(3-x) > 6-2{,}5x, \\ 4 > \frac{2}{3}x - 0{,}2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3{,}4-(3-x) < 2x-1, \\ 5 < \frac{3}{7}x - 1. \end{cases}$

1193. Найдите область определения выражения:

а) $\frac{\sqrt{2x-6}+\sqrt{18-x}}{\sqrt{7{,}2-1{,}2x}}$;

б) $\frac{\sqrt{34{,}2-3{,}8x}}{\sqrt{x-4}-2}$.

? Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение стандартного вида числа.

2. Запишите в стандартном виде число 0,00027, укажите значащую часть и порядок числа.

Дополнительные упражнения к главе 6

К параграфу 14

1194. Дана последовательность:

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{128},\ \frac{1}{256},\ \frac{1}{512}.$$

Запишите эту последовательность, представив каждый её член в виде степени с основанием 2.

1195. Докажите, что значения выражений являются взаимно обратными числами:

а) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ и $(0,8)^{-3}$;

б) 1000^{-2} и $(0,001)^{-2}$;

в) $3,5^4$ и $\left(\frac{2}{7}\right)^{-4}$;

г) $\left(6\frac{1}{4}\right)^{-5}$ и $(0,16)^{-5}$.

1196. Используя прикидку результатов действий, сравните с нулём значение выражения:

а) $7 \cdot 1\frac{2}{3} - 35 \cdot 5^{-1}$;

б) $12 : \left(-\frac{1}{7}\right) + 876 \cdot 2^{-3}$;

в) $(1,5 \cdot 10^{-5})(2,1 \cdot 10^{6}) - 3$;

г) $35 - (6,8 \cdot 10^{7})(4,2 \cdot 10^{-5})$.

1197. Представьте в виде степени с основанием 3 выражение, в котором n — целое число:

а) $3^n \cdot 3^{n-1}$;

б) $(3^n)^{-2} \cdot 3^{4n}$;

в) $3^{5n+2} : 3^{3n+5}$;

г) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot 9^n$;

д) $27^{n-1} : \left(\frac{1}{9}\right)^n$;

е) $\left(\frac{1}{81}\right)^n \cdot 243^{n+2}$.

1198. Представьте в виде степени с основанием 5 выражение, в котором n — целое число:

а) $(0,1)^n \cdot 2^n$;

б) $15^{2n}\left(\frac{1}{45}\right)^n$;

в) $10^n \cdot \left(\frac{1}{1250}\right)^n$.

1199. Вычислите:

а) $7{,}5^{-1} : (5^{-1} + 3^{-1})$;
б) $3^{-2} : (6^{-1} - 3^{-1})^2$;
в) $(2^{-1} + 3^{-1})^2 : (2^{-1} - 3^{-1})^2$;
г) $(12^{-1} + 18^{-1}) : (12^{-1} - 18^{-1})$.

1200. Верно ли неравенство:

а) $0{,}9 - 1{,}1 \cdot 1{,}3 < 0{,}014$;
б) $168 \cdot (-5)^{-1} < 168 \cdot (-6)^{-1}$;
в) $(1{,}4 \cdot 10^{-5}) \cdot (1{,}6 \cdot 10^{6}) < 4$;
г) $(1{,}5 \cdot 10^{-3}) \cdot (2{,}1 \cdot 10^{4}) > 30$?

1201. Решите уравнение:

а) $3x^2 - |x - 3| - 1 = 0$;
б) $2x^{-2} - 3x^{-1} - 2 = 0$;
в) $(x^2 - 1)^2 - 18(x^2 - 1) + 45 = 0$;
г) $(x^3 + 1)^2 - 10(x^3 + 1) + 9 = 0$.

К параграфу 15

1202. Представьте в виде рациональной дроби:

а) $(x - x^{-1}) : (x^2 - x^{-1})$;
б) $(y + y^{-1} - 1) : (y^2 + y^{-1})$;
в) $\left(\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{ab^{-1}-ba^{-1}}\right)^2$;
г) $\left(\dfrac{ab^{-1}+a^{-1}b+1}{a^{-2}b-ab^{-2}}\right)^{-1}$.

1203. Найдите значение выражения

$$\frac{(a+x)^{-2}+(a-x)^{-2}}{(a-x)^{-2}-(a+x)^{-2}},$$

зная, что $\frac{a}{x} = 2{,}5$.

1204. Сократите дробь, зная, что n — целое число:

а) $\dfrac{5^{n+1}-5^n}{4}$;
б) $\dfrac{8^n-2^n}{4^n-1}$;
в) $\dfrac{3^n+3^{-n}}{9^n+1}$;
г) $\dfrac{7^n+7^{n+1}}{7^{-n}+7^{1-n}}$;
д) $\dfrac{a^n+a^{n+1}+a^{n+2}}{a^{-n}+a^{1-n}+a^{2-n}}$;
е) $\dfrac{b^{3n}+b^{2n}+b^n}{b^{-3n}+b^{-2n}+b^{-n}}$.

1205. Докажите, что при любых значениях m и n значение выражения — одно и то же число:

а) $\dfrac{2^m \cdot 3^{n-1} - 2^{m-1} \cdot 3^n}{2^m \cdot 3^n}$;
б) $\dfrac{5^m \cdot 4^n}{5^{m-2} \cdot 2^{2n} + 5^m \cdot 2^{2n-1}}$.

1206. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}-\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}\right):\dfrac{1}{ab^{-1}-a^{-1}b}$;

б) $\left(\dfrac{x^{-3}+y^{-3}}{x^{-1}+y^{-1}}-x^{-1}y^{-1}\right):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)^2$.

1207. Докажите, что значение выражения не зависит от n (n – целое число):

а) $\dfrac{5^{n+1}\cdot 2^{n-2}+5^{n-2}\cdot 2^{n-1}}{10^{n-2}}$;

б) $\dfrac{21^n}{3^{n-1}\cdot 7^{n+1}+3^n\cdot 7^n}$.

1208. Упростите выражение

$$\frac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)\cdot(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}.$$

1209. Упростите выражение

$$\frac{1+(a+x)^{-1}}{a-(a+x)^{-1}}\cdot\left(1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right)$$

и найдите его значение при $x=\dfrac{1}{a-1}$.

1210. Представьте в виде рациональной дроби выражение:

а) $(a^{-2}b^{-1})^3 : (ab)^{-2}$;

б) $(b^{-2}c + bc^{-2})(b^{-1} + c^{-1})^{-1}$.

1211. Масса Солнца равна $1{,}98\cdot 10^{30}$ кг, масса Венеры — $4{,}9\cdot 10^{24}$ кг, масса Марса — $6{,}5\cdot 10^{23}$ кг, масса Луны — $7{,}4\cdot 10^{22}$ кг. Во сколько раз масса Солнца больше массы:

а) Венеры; в) Марса;
б) Земли; г) Луны?

1212. Выполните действия над числами, записанными в стандартном виде:

а) $(5{,}6\cdot 10^{10})\cdot(1{,}4\cdot 10^{-7})$;

б) $(1{,}44\cdot 10^{-9}) : (1{,}2\cdot 10^{-12})$;

в) $5{,}9\cdot 10^4 + 3{,}8\cdot 10^3$;

г) $7{,}12\cdot 10^6 - 4{,}28\cdot 10^5$.

1213. Порядок числа x равен 12. Определите порядок числа:

а) $100x$; в) 10^8x;

б) $0{,}0001x$; г) $10^{-5}x$.

1214. Порядок числа x равен 20, а порядок числа y равен 13. Каким может быть порядок числа:

а) xy; б) $\frac{x}{y}$?

1215. В атомной физике за единицу массы принята атомная единица массы (обозначается а. е. м.).

$$1 \text{ а. е. м.} = 1{,}66 \cdot 10^{-24} \text{ г.}$$

Выразите в граммах массу одного атома водорода, гелия, алюминия и свинца, зная, что:

масса атома водорода равна 1,008 а. е. м.,
масса атома гелия равна 3,016 а. е. м.,
масса атома алюминия равна 29,99 а. е. м.,
масса атома свинца равна 205,97 а. е. м.

Глава 7 Функции и графики

В этой главе более подробно рассматриваются такие понятия, как область определения и область значений функции, начинается изучение преобразований графиков функций — растяжения (сжатия) и параллельного переноса. В главе рассматриваются свойства и графики степенных функций вида $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$, а также обратной пропорциональности и дробно-линейной функции.

§ 16. Преобразования графиков функций

49. Функция, область определения и область значений функции

В курсе алгебры 7 класса вы познакомились с понятием функции, со свойствами и графиками некоторых функций и способами задания функций.

Напомним, что *функцией* называется соответствие между множествами X и Y, при котором каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y.

Обозначим буквой x переменную, значениями которой являются элементы множества X, а буквой y — переменную, значениями которой являются элементы множества Y. Тогда каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y. Переменную x, как известно, называют независимой переменной или аргументом, а переменную y — зависимой переменной. Говорят также, что y является функцией от x.

Если переменная y является функцией от переменной x, то используется запись $y = f(x)$ (читается: «y равен f от x»).

Если функция задана выражением с переменной x, то символом $f(x)$ обозначается выражение, которым задаётся эта функция.

Пусть, например, $f(x)=\frac{3x+1}{x-2}$ и требуется найти значение функции f при $x = 4$. Тогда $f(4)$ — это значение функции при $x = 4$, т. е. $f(4)=\frac{3\cdot 4+1}{4-2}=\frac{13}{2}=6{,}5$. Аналогично $f(-3)=\frac{3\cdot(-3)+1}{-3-2}=\frac{8}{5}=1{,}6$.

Если одновременно рассматриваются несколько функций, то для их обозначения используются другие буквы латинского или греческого алфавита. Например, буквы g, h, φ.

Множество значений аргумента называют *областью определения функции*.

Если задаётся функция, то указывается правило соответствия и область её определения. Например, для функции $f(x) = x^2$, где $-3 \leqslant x \leqslant 3$, областью определения является промежуток $[-3; 3]$.

Если функция задана формулой $y = f(x)$ и область её определения не указана, то областью определения этой функции является множество допустимых значений переменной x для выражения $f(x)$. Например, если функция задана формулой $y = \frac{x^3}{x-1}$, то областью определения этой функции является множество действительных чисел, кроме числа 1.

Область определения функции $y = f(x)$ принято обозначать символом $D(f)$ (читается: «D от f») или $D(y)$ (читается: «D от y»).

Используя эти обозначения, область определения в рассмотренных выше примерах можно записать так: $D(f) = [-3; 3]$, $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Все значения, которые принимает функция, называют *областью значений функции*.

Для области значений функции $y = f(x)$ принято обозначение $E(f)$ (читается: «E от f») или $E(y)$ (читается: «E от y»).

Например, для функции $f(x) = x^2$, где $-3 \leqslant x \leqslant 3$, областью значений служит промежуток $[0; 9]$, т. е. $E(f) = [0; 9]$.

Значения аргумента, при которых функция $y = f(x)$ обращается в нуль, называют *нулями функции*. Промежутки, в которых функция принимает только положительные или только отрицательные значения, называют *промежутками знакопостоянства*.

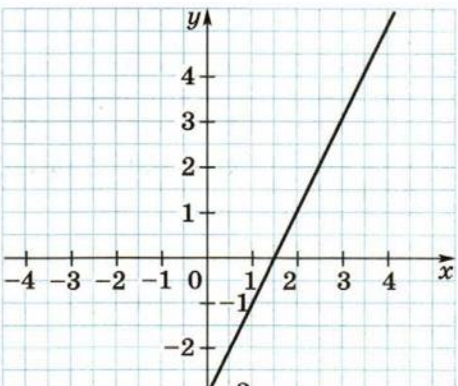


Рис. 56

Пример 1. Пусть функция задана формулой $g(x) = 2x - 3$, где $D(g) = [-1; 4]$. Найдём область значений функции g.

По условию $-1 \leqslant x \leqslant 4$. Применяя свойства числовых неравенств, оценим значение выражения $2x - 3$.

Имеем:

$$-1 \leqslant x \leqslant 4,$$

$$-2 \leqslant 2x \leqslant 8,$$

$$-5 \leqslant 2x - 3 \leqslant 5.$$

Значит, $E(g) = [-5; 5]$. Это легко увидеть, если обратиться к графику функции g (рис. 56).

Пример 2. Найдём область значений функции, заданной формулой $f(x) = |x|$.

Очевидно, что областью определения функции f является множество действительных чисел, т. е. $D(f) = \mathbf{R}$, а областью значений функции является множество неотрицательных чисел, так как модуль действительного числа (по определению модуля) может быть лишь неотрицательным числом. Значит, $E(f) = [0; +\infty)$.

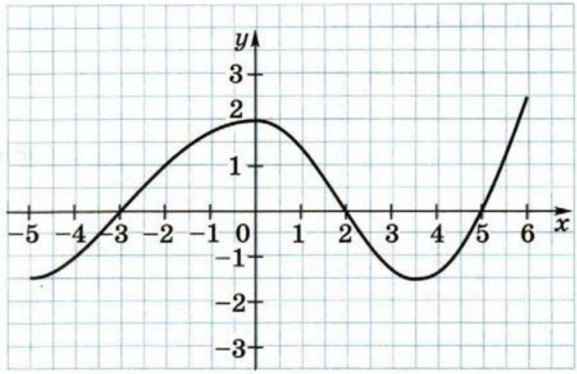


Рис. 57

Пример 3. Найдём нули и промежутки знакопостоянства функции $y = g(x)$, где $x \in [-5; 6]$, заданной графиком на рисунке 57.

Нулями функции g служат числа: −3, 2 и 5;
$g(x) > 0$ при $x \in (-3; 2) \cup (5; 6]$;
$g(x) < 0$ при $x \in [-5; -3) \cup (2; 5)$.

Пример 4. Пусть функция задана двумя формулами:

$$y = \begin{cases} -x - 2, \text{ если } -6 \leqslant x < 0, \\ 3x + 1, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Найдём область значений функции.
Если $-6 \leqslant x < 0$, то $0 < -x \leqslant 6$ и $-2 < -x - 2 \leqslant 4$.
Если $0 \leqslant x \leqslant 3$, то $0 \leqslant 3x \leqslant 9$ и $1 \leqslant 3x + 1 \leqslant 10$.
Значит,

$$E(g) = (-2; 4] \cup [1; 10] = (-2; 10].$$

Пример 5. Функция задана формулой $f(x) = x^2 - 5x$. Найдём такое значение a, при котором $f(a) = f(a + 2)$. Имеем:

$$f(a) = a^2 - 5a,$$

$$f(a + 2) = (a + 2)^2 - 5(a + 2) =$$
$$= a^2 + 4a + 4 - 5a - 10 =$$
$$= a^2 - a - 6.$$

Чтобы найти значение a, надо решить уравнение

$$a^2 - 5a = a^2 - a - 6.$$

Решив его, найдём, что

$$a = 1{,}5.$$

Упражнения

1216. Функция задана формулой $f(x) = 5x - 3$. Найдите:

а) $f(2)$, $f(0)$, $f(0{,}5)$;

б) значение аргумента x, при котором $f(x) = 12$, $f(x) = 0$, $f(x) = -38$.

1217. Зная, что $g(x) = x^2 - 6x + 8$, найдите:

а) $g(1)$; в) $g(3)$; д) $g(0)$;
б) $g(2)$; г) $g(-2)$; е) $g(-5)$.

1218. Найдите нули функции $y = f(x)$, если:

а) $f(x) = 8x - 2$; г) $f(x) = x^2 + 4$;
б) $f(x) = x^2 - 9$; д) $f(x) = 2x^{-2} - 5x^{-1} + 2$;
в) $f(x) = x^3 - 4x$; е) $f(x) = x^4 + x^2 - 2$.

1219. Решите уравнение $f(x) = g(x)$, если:

а) $f(x) = 2x - 1$ и $g(x) = 3x - 5$;

б) $f(x) = x^2 - 10$ и $g(x) = 2x - 10$;

в) $f(x) = 2x^2 + 5x + 7$ и $g(x) = x^2 + x + 4$;

г) $f(x) = 2x - 4$ и $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 7}{x + 1}$.

1220. Найдите область определения функции, если:

а) $g(x) = 2x - 1$; г) $g(x) = \frac{1}{|x| + x}$;

б) $g(x) = \frac{1}{x - 5}$; д) $g(x) = \sqrt{(x - 2)(x + 3)}$;

в) $g(x) = \frac{1}{|x| - x}$; е) $g(x) = \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + x}}$.

1221. Найдите нули функции, промежутки знакопостоянства и область значений функции, если:

а) $f(x) = 5x - 1$, где $D(f) = [-2;\ 2]$;

б) $f(x) = -3x + 2$, где $D(f) = [-4;\ 7]$;

в) $f(x) = 2x - 1$;

г) $f(x) = x^2$.

1222. Функция задана формулой $h(x) = x^2 - 8x$. Найдите такое число a, при котором:

а) $h(a) = h(a + 3)$;

б) $h(a) = h(a - 5)$.

1223. Укажите область определения функции и найдите её область значений, если:

а) $g(x)=\begin{cases}-0,5x-1,5, \text{ если } -7\leqslant x\leqslant -1,\\ x^3, \text{ если } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ -0,5x+1,5, \text{ если } 1< x\leqslant 7;\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}-4, \text{ если } -6\leqslant x< -2,\\ -x^2, \text{ если } -2\leqslant x< 0,\\ x^2, \text{ если } 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 4, \text{ если } 2< x\leqslant 8.\end{cases}$

1224. Найдите область определения и область значений функции

$$y=\frac{x^3-4x}{x^2-4}$$

и постройте график этой функции.

1225. Покажите, что точка $A(2;\ -5)$ принадлежит графику функции

$$y = x^2 - 5x + 1.$$

Упражнения для повторения

1226. Найдите все целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases}4(2x-1)<21,\\ 2x-0,6>1,4(x-2);\end{cases}$

б) $\begin{cases}6y(y+1)<3y(2y-1),\\ 0,14+0,04y<0,74+0,1y.\end{cases}$

1227. Докажите, что значение выражения:

а) $6^{18} + 36^{20}$ делится на 37;

б) $125^{10} - 25^{14} + 5^{27}$ делится на 11.

1228. Представьте выражение в виде степени с основанием 3 и найдите его значение:

а) $9^{-4}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{-1}\cdot 729;$

б) $81^{-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}\cdot\frac{1}{243}.$

50. Растяжение и сжатие графиков функций

Выясним, какая связь существует между графиками функций $y = f(x)$ и $y = kf(x)$, где k — число, не равное нулю.

Пусть графиком функции $y = f(x)$, область определения которой — промежуток [0; 8], является кривая, изображённая на рисунке 58 чёрным цветом.

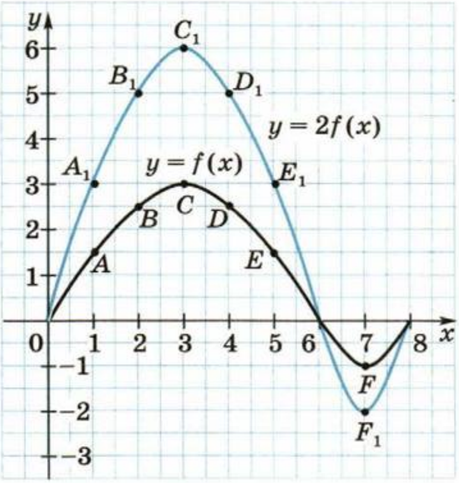


Рис. 58

Рассмотрим сначала случай, когда $k > 1$.

Построим график функции $y = kf(x)$, где $k = 2$.

Для этого расстояние каждой точки графика функции $y = f(x)$ от оси x увеличим в 2 раза, т. е. умножим на 2 её ординату.

Построение выполним так: проведём, например, в точках оси x с абсциссами 1, 2, 3, 4, 5 и 7 перпендикуляры к оси x и длины отрезков, заключённых между осью x и соответствующими точками графика данной функции (A, B, C, D, E, F), увеличим в 2 раза. Получим точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1. Через эти точки проведём линию, учитывая при этом, что каждая точка графика функции $y = 2f(x)$ должна находиться от оси x на расстоянии в 2 раза большем, чем соответствующая точка графика функции $y = f(x)$. Заметим, что точки с абсциссами 0; 6 и 8, принадлежащие оси x, останутся на месте, так как их ординаты равны нулю ($0 \cdot 2 = 0$). Получим график функции $y = 2f(x)$ (см. рис. 58).

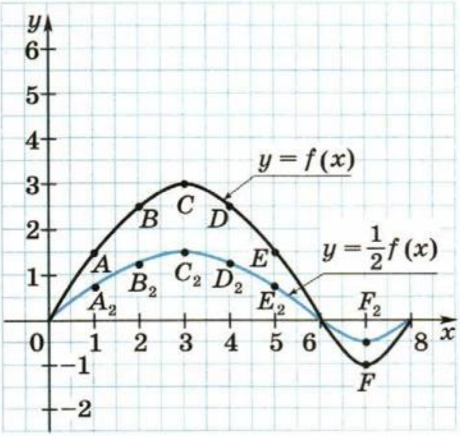


Рис. 59

Рассмотрим теперь случай, когда $0 < k < 1$, например $k = \frac{1}{2}$, и построим график функции $y = kf(x)$ при $k = \frac{1}{2}$.

В этом случае нам придётся расстояние каждой точки графика функции $y = f(x)$ от оси x уменьшить в 2 раза, т. е. умножить её ординату на $\frac{1}{2}$.

На рисунке 59 показано, как выполнено построение в этом случае. Точки A, B, C, D, E и F перешли в точки A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 и F_2.

Говорят, что

график функции $y = kf(x)$ при $k > 1$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ растяжением от оси x исходного графика в k раз, а при $0 < k < 1$ — сжатием к оси x графика функции $y = f(x)$ в $\frac{1}{k}$ раз.

Наконец, рассмотрим случай, когда $k < 0$. Мы ограничимся значением $k = -1$, т. е. выясним, как можно построить график функции $y = -f(x)$, зная график функции $y = f(x)$.

При любом значении аргумента x значения этих функций являются противоположными числами. Значению $x = x_0$ соответствуют взаимно противоположные числа: $f(x_0)$ и $-f(x_0)$.

Значит, соответствующие точки графиков функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ симметричны относительно оси x.

Иначе говоря,

график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси x.

На рисунке 60 в одной и той же системе координат построены график функции $y = f(x)$ и график функции $y = -f(x)$.

Отсюда следует, что графики функций $y = kf(x)$ и $y = -kf(x)$ при любом $k \neq 0$ симметричны относительно оси x.

Значит, чтобы построить график функции $y = kf(x)$, где $k < 0$, можно сначала построить график функции $y = -kf(x)$, где $-k > 0$, а затем отобразить его симметрично относительно оси x.

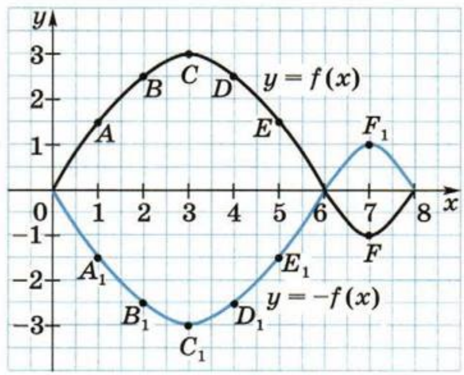


Рис. 60

Упражнения

1229. Функция g задана графиком (рис. 61). Область определения функции g — промежуток $[-5; 3]$. Постройте график функции:

а) $y = 2{,}5g(x)$;

б) $y = \frac{1}{3}g(x)$.

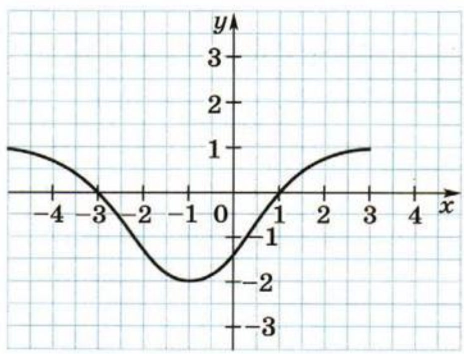


Рис. 61

1230. Постройте график функции $f(x) = 0{,}5x$. В этой же системе координат постройте график:

а) $y = 1{,}5f(x)$;

б) $y = -1{,}5f(x)$.

1231. Изобразите схематически график функции:

а) $y = 2x^2$; г) $y=-\frac{1}{2}x^2$;

б) $y=\frac{1}{2}x^2$; д) $y = -2x^3$;

в) $y = -x^2$; е) $y=\frac{1}{2}x^3$.

1232. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = |x|$ и $y = 2|x|$;

б) $y = -|x|$ и $y = -0{,}5|x|$;

в) $y = \sqrt{x}$ и $y = 0{,}5\sqrt{x}$;

г) $y = -\sqrt{x}$ и $y = -2\sqrt{x}$.

1233. Решите графически уравнение:

а) $2\sqrt{x} = x + 1$; в) $0{,}5|x| = 3 - x$;

б) $3 - x = -0{,}5\sqrt{x}$; г) $-|x| = x - 2$.

1234. Известно, что графику функции $y = f(x)$ принадлежит точка $A(a;\ b)$. Принадлежит ли графику функции $y=\frac{1}{5}f(x)$ точка $B(a;\ 0{,}2b)$? Ответ обоснуйте.

Упражнения для повторения

1235. Найдите все целые значения аргумента, при которых функция

$$g(x) = \frac{2x+5}{x}$$

принимает целые значения.

1236. Решите неравенство:

а) $2(3 - 2x) + 3(2 - x) \leqslant 40$;

б) $4(2 + 3x) + 3(7 - 4x) < 5$.

1237. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1}{7}a^mb^4\right)^{-2} \cdot 14a^3b^8$;

б) $(2ab^{-3m})^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}a^{-3}\right)^{-1}$.

51. Параллельный перенос графиков функций

Выясним, как связаны между собой графики функций $y = f(x)$ и $y = f(x) + n$, где n — произвольное число. Рассуждения проведём для $n = 2$.

Покажем, что график функции $y = f(x) + 2$ можно получить из графика функции $y = f(x)$, выполнив параллельный перенос на 2 единицы в направлении оси y.

Очевидно, что при этом параллельном переносе всякая точка $M(x_0; y_0)$ координатной плоскости перейдёт в точку $M_1(x_0; y_0 + 2)$ (рис. 62).

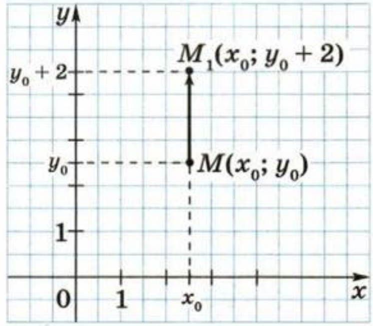


Рис. 62

Если точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то верно равенство $y_0 = f(x_0)$. Но тогда является верным и равенство $y_0 + 2 = f(x_0) + 2$. А это означает, что точка $M_1(x_0; y_0 + 2)$ принадлежит графику функции $y = f(x) + 2$.

Следовательно, при параллельном переносе на 2 единицы в направлении оси y каждая точка графика функции $y = f(x)$ переходит в точку графика функции $y = f(x) + 2$. При этом на графике функции $y = f(x) + 2$ не окажется «лишних» точек. В самом деле, если точка $K_1(x_1; y_1)$ принадлежит графику функции $y = f(x) + 2$, то верно равенство $y_1 = f(x_1) + 2$. Отсюда получается, что верным является также равенство $y_1 - 2 = f(x_1)$. А это означает, что точка $K(x_1; y_1 - 2)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Таким образом, точка $K_1(x_1; y_1)$ является образом точки $K(x_1; y_1 - 2)$ при рассматриваемом параллельном переносе.

Рассуждение, которое мы провели для $n = 2$, сохраняет силу и для любого $n \neq 0$. Поэтому можно сделать вывод:

график функции $y = f(x) + n$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью сдвига вдоль оси y на $|n|$ единиц вверх, если $n > 0$, или вниз, если $n < 0$.

На рисунке 63 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = x^2 - 4$. Парабола $y = x^2 - 4$ получена из параболы $y = x^2$ в результате сдвига её на 4 единицы вниз.

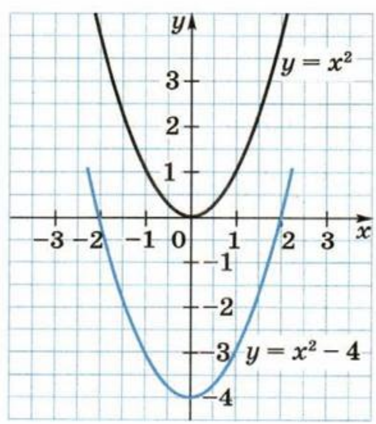


Рис. 63

Выясним теперь, как связаны между собой графики функций $y = f(x)$ и $y = f(x - m)$, где m — произвольное число.

Пусть $m = 3$. С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые мы провели выше, можно показать, что график функции

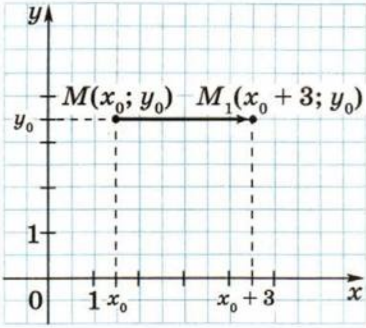


Рис. 64

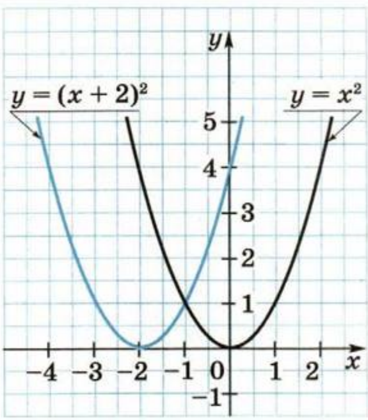


Рис. 65

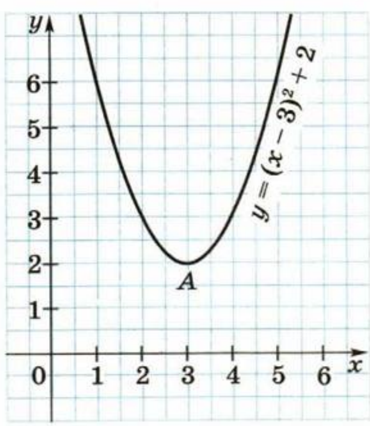


Рис. 66

$y = f(x - 3)$ получается из графика функции $y = f(x)$ при параллельном переносе вдоль оси x на 3 единицы вправо. Это следует из того, что при указанном параллельном переносе каждая точка $M(x_0;\ y_0)$ переходит в точку $M_1(x_0 + 3;\ y_0)$ (рис. 64).

Вообще

график функции $y = f(x - m)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью сдвига вдоль оси x на $|m|$ единиц вправо, если $m > 0$, или влево, если $m < 0$.

На рисунке 65 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = (x + 2)^2$. Парабола $y = (x + 2)^2$ получена из параболы $y = x^2$ в результате её сдвига на 2 единицы влево.

Из курса алгебры 7 класса известно, что парабола — график функции $y = x^2$ — имеет ось симметрии, которой является ось y. Точку пересечения параболы с её осью симметрии называют *вершиной параболы*. У параболы $y = x^2 + 2$ осью симметрии является та же ось y, а у параболы $y = (x - 3)^2$ — прямая $x = 3$.

Если выполнить последовательно два параллельных переноса: один в направлении оси y на 2 единицы вверх, а другой в направлении оси x на 3 единицы вправо, то получим параболу с вершиной в точке $A(3;\ 2)$ (рис. 66).

График функции вида $y = (x - m)^2 + n$ есть парабола с вершиной в точке $A(m;\ n)$.

Из рассмотренных выше преобразований графиков можно сделать вывод, что

график функции $y = f(x - m) + n$ может быть получен из графика функции $y = f(x)$ в результате последовательно выполненных двух параллельных переносов: сдвига вдоль оси x на m единиц и сдвига графика функции $y = (x - m)^2$ вдоль оси y на n единиц.

Упражнения

1238. Докажите, что если точка $B(x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $B_1(x_0;\ y_0 + 5)$ принадлежит графику функции $y = f(x) + 5$.

1239. Докажите, что если точка $C(x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции $y = g(x)$, то точка $C_1(x_0 + 3;\ y_0)$ принадлежит графику функции $y = g(x - 3)$.

1240. График функции $y = g(x)$ — ломаная ABC, где $A(-4;\ -2)$, $B(2;\ 4)$, $C(4;\ 2)$. Постройте график функции $y = g(x)$ и график функции:

а) $y = g(x) + 2$; в) $y = g(x - 4)$;
б) $y = g(x) - 2$; г) $y = g(x + 1)$.

1241. Изобразите схематически график функции

а) $y = x^2 + 1$; в) $y = (x - 2)^2$;
б) $y = x^2 - 1$; г) $y = (x + 1)^2$.

1242. Постройте график функции:

а) $y = |x| + 1$; г) $y = |x - 3|$;
б) $y = |x| - 2$; д) $y = |x + 2| - 1$;
в) $y = |x + 1|$; е) $y = |x - 1| + 1$.

1243. Изобразите схематически график функции; найдите нули функции и промежутки знакопостоянства:

а) $y = x^3 - 1$; в) $y = (x + 2)^3 - 1$;
б) $y = (x + 1)^3$; г) $y = (x - 3)^3 + 1$.

1244. Постройте график функции; найдите нули функции и промежутки знакопостоянства:

а) $y = -x^2 + 1$; в) $y = \frac{1}{2}|x - 3|$;
б) $y = -x^3 - 1$; г) $y = 2|x| - 3$.

1245. Изобразите схематически график функции и укажите, в каких координатных четвертях нет ни одной точки графика:

а) $y = \sqrt{x} + 12$; в) $y = \sqrt{x - 4} + 2$;
б) $y = \sqrt{x - 11}$; г) $y = \sqrt{x - 5} + 8$.

1246. Изобразите схематически график функции и укажите область определения и область значений этой функции:

а) $y = \sqrt{x - 8}$;   в) $y = \sqrt{x - 7} + 10$;

б) $y = \sqrt{x} + 6$;   г) $y = \sqrt{x + 4} + 2$.

1247. На рисунке 67 построены графики функций:

$y = \sqrt{x} + 3$; $y = \sqrt{x - 2}$; $y = \sqrt{x + 2}$; $y = \sqrt{x + 2} + 3$.

Для каждого графика укажите соответствующую формулу.

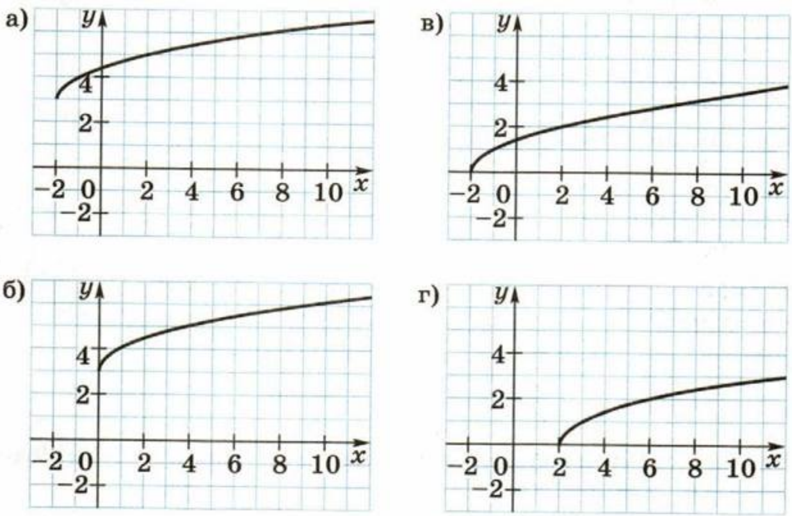


Рис. 67

1248. Постройте график функции $f(x) = -(x - 2)^2 + 4$ и найдите по графику:

а) $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$;

б) значения x, при которых $f(x) = 3$, $f(x) = 0$, $f(x) = -5$;

в) промежутки, в которых $f(x) < 0$, $f(x) > 0$;

г) область значений функции f.

1249. Укажите координаты вершины параболы:

а) $y = (x - 10)^2 + 8$;   в) $y = -(x - 4)^2 + 7$;

б) $y = (x + 9)^2 - 5$;   г) $y = -(x + 7)^2 - 9$.

1250. Даны функции:

$$f(x) = (x - 2)^2 - 1, \quad g(x) = x - 1, \quad \varphi(x) = -x + 3.$$

Используя графики, решите уравнение:

а) $f(x) = g(x)$;
б) $f(x) = \varphi(x)$;
в) $g(x) = \varphi(x)$.

1251. Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, \text{ если } x \geqslant 0, \\ |x - 4|, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Решите уравнение:

а) $f(x) = -5$; г) $f(x) = 4$;
б) $f(x) = 0$; д) $f(x) = 6$.
в) $f(x) = 3$; е) $f(x) = -1$.

1252. Изобразите схематически график функции $g(x) = (x - 2)^3$ и, используя его, решите неравенство:

а) $g(x) < -1$;
б) $g(x) \geqslant 0$;
в) $g(x) > 1$.

1253. При каких значениях n график функции $y = x^2 + n$ пересекает ось x в точках, абсциссы которых равны:

а) -1 и 1; б) -2 и 2; в) -5 и 5?

1254. При каких значениях m график функции $y = (x - m)^2$ пересекает ось y в точке, ордината которой равна:

а) 1; б) 4; в) 9?

Упражнения для повторения

1255. Выясните, при каких целых значениях a, где $a < 10$, уравнение

$$(x + a - 2)^2 + (x - a + 2)^2 = 2a^2 + 8$$

имеет целые корни. Найдите эти корни.

1256. Укажите все несократимые дроби со знаменателем 30, которые принадлежат промежутку $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{3}\right)$.

1257. Представьте в виде рациональной дроби выражение

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{x+2y}}{\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy+4y^2}+\frac{1}{x^2+2xy}}-\frac{1}{\frac{2}{x}+\frac{1}{y}}.$$

1258. Укажите два последовательных целых числа, между которыми заключено значение выражения:

а) $2\cdot 3^{-2}-3\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$;

б) $\left(\frac{2}{13}\right)^{-2}+8\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^{-1}$.

? Контрольные вопросы и задания

1. Что называют областью значений функции? Найдите $E(f)$ для функции $f(x) = x^2$, где $D(f) = [-1;\ 2]$.

2. Как из графика функции $y = f(x)$ можно получить график функции $y = kf(x)$ в случае, когда:

а) $k > 1$; б) $0 < k < 1$; в) $k < 0$?

3. Как из графика функции $y = f(x)$ получить график функции:

а) $y = f(x) + n$; б) $y = f(x - m)$; в) $y = f(x - m) + n$?

§ 17. Дробно-линейная функция

52. Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ и их графики

В курсе алгебры 7 класса вы познакомились со степенной функцией, т. е. функцией, задаваемой формулой вида $y = x^n$, где n — натуральное число.

В этом параграфе мы рассмотрим примеры степенных функций с целым отрицательным показателем.

Отметим сразу, что область определения любой функции, заданной формулой вида $y = x^n$, где n — целое отрицательное число, есть множество всех чисел, отличных от нуля. Это вытекает из того, что выражение x^n, где $n \in \boldsymbol{Z}$ и $n < 0$, имеет смысл при любых x, кроме нуля.

Сначала рассмотрим степенную функцию $y = x^{-1}$. Выясним некоторые её свойства и особенности графика.

1. При любом положительном значении x функция принимает положительное значение, а при любом отрицательном значении x — отрицательное значение.

Действительно, если $x > 0$, то $x^{-1} > 0$; если $x < 0$, то $x^{-1} < 0$.

Значит, график функции расположен в первой и третьей координатных четвертях. Заметим, что так как функция при $x = 0$ не определена, то на оси y нет ни одной точки, принадлежащей графику этой функции, т. е. график не пересекает ось y. Значит, график функции состоит из двух отдельных частей.

2. Любым противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.

Например, если $x = 3$, то $y=\frac{1}{3}$, если $x = -3$, то $y=-\frac{1}{3}$.

Вообще, если $x = a$, то $y = a^{-1}$, если $x = -a$, то $y = (-a)^{-1}$. Значит, если $a \neq 0$, то каждой точке $\left(a; \frac{1}{a}\right)$ соответствует точка $\left(-a; -\frac{1}{a}\right)$, симметричная относительно начала координат, и наоборот. Иначе говоря, точки графика, имеющие противоположные абсциссы, расположены симметрично относительно начала координат, т. е. график функции $y = x^{-1}$ симметричен относительно начала координат.

Прежде чем сформулировать третье свойство функции $y = x^{-1}$, рассмотрим некоторые закономерности поведения функции при возрастании и убывании аргумента x и введём необходимые обозначения.

Пусть значения аргумента x, оставаясь положительными, становятся всё меньше и меньше, например, x принимает значения: 1, 2, 5, 100, 1000 и т. д. Тогда соответствующими значениями функции $y = x^{-1}$ являются числа: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ и т. д., т. е. значения y приближаются к нулю. В таких случаях пишут: если $x > 0$ и $x \to +\infty$ (читают: «икс стремится к плюс бесконечности»), то $y \to 0$ («игрек стремится к нулю»).

Пусть значения аргумента x, оставаясь положительными, неограниченно убывают, например, x принимает значения: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ и т. д. Тогда соответствующими значениями функции $y = x^{-1}$ являются числа: 1, 2, 10, 100, 1000 и т. д. Это можно записать так: если $x > 0$ и $x \to 0$, то $y \to +\infty$.

Аналогично обстоит дело, когда $x < 0$.

Если значения x, оставаясь отрицательными, неограниченно убывают, т. е. если $x < 0$ и $x \to -\infty$ (читают: «икс стремится к минус бесконечности»), то $y \to 0$.

Если $x < 0$ и $x \to 0$, то $x \to -\infty$.

Например: если $x = -1, -2, -5, -100, -1000$ и т. д., то $y = -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{100}, -\frac{1}{1000}$ и т. д. Если $x = -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{100}, -\frac{1}{1000}$ и т. д., то $y = -1, -2, -5, -100, -1000$ и т. д.

Таким образом, мы установили ещё одно свойство функции $y = x^{-1}$.

3. Если $x > 0$ и $x \to +\infty$, то $y \to 0$; если $x > 0$ и $x \to 0$, то $y \to +\infty$. Если $x < 0$ и $x \to -\infty$, то $y \to 0$; если $x < 0$ и $x \to 0$, то $y \to -\infty$.

Из этого свойства вытекает, что точки графика, удаляясь от оси y вправо или влево, неограниченно приближаются к оси x, а удаляясь от оси x вверх или вниз, неограниченно приближаются к оси y.

Теперь построим график функции $y = x^{-1}$.

Учитывая свойство 2, составим таблицу лишь для положительных значений аргумента (точки графика с отрицательными абсциссами симметричны относительно начала координат точкам графика с противоположными положительными абсциссами).

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых даны в таблице, и точки с противоположными координатами (рис. 68).

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Учитывая свойства функции, проведём через отмеченные точки в первой и третьей координатных четвертях плавные линии.

Получим график функции $y = x^{-1}$ (рис. 69). Кривую такого вида называют *гиперболой*. Она состоит из двух ветвей.

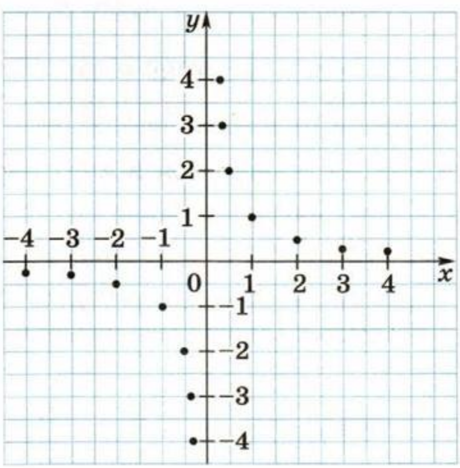


Рис. 68

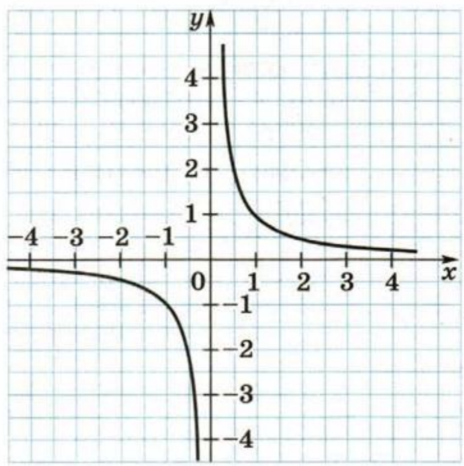


Рис. 69

Ось x и ось y, к которым как угодно близко приближаются точки гиперболы при удалении их в бесконечность, называют *асимптотами* гиперболы.

Вообще *асимптотой кривой называется прямая, к которой приближаются как угодно близко точки кривой при удалении их в бесконечность.*

Термин «*асимптота*» происходит от греческого слова *asymptotos*, что означает несовпадающий.

Выясним теперь свойства функции $y = x^{-2}$ и особенности её графика.

1. При любом отличном от нуля значении аргумента функция принимает положительные значения.

Это следует из того, что если $x \neq 0$, то $x^2 > 0$, и потому $x^{-2} > 0$. Значит, все точки графика функции расположены выше оси x.

2. Любым противоположным значениям аргумента соответствует одно и то же значение функции.

Действительно, при любом x, отличном от нуля,

$$x^{-2} = (-x)^{-2}, \quad \text{так как} \quad x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{и} \quad (-x)^{-2} = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Следовательно, точки графика с противоположными абсциссами симметричны относительно оси y, т. е. график функции симметричен относительно оси y.

3. Если $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, то $y \to 0$; если $x \to 0$ (будучи положительным или отрицательным), то $y \to +\infty$.

Действительно, если $|x|$ неограниченно возрастает, то $|x^{-2}|$ становится всё меньше и меньше, оставаясь положительным числом, т. е. $x^{-2} \to 0$. Если $|x|$ становится всё меньше и меньше, т. е. $|x| \to 0$, то x^{-2} неограниченно возрастает, т. е. $x^{-2} \to +\infty$.

Геометрически это означает, что ось x и ось y являются асимптотами графика функции.

Теперь построим график функции $y = x^{-2}$.

Составим таблицу лишь для положительных значений аргумента, учитывая, что по свойству 2 при противоположных значениях x функция принимает одинаковые значения:

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	9	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых занесены в таблицу, и точки с противоположными абсциссами (рис. 70). Через отмеченные точки проведём в первой и во второй координатных четвертях плавные линии. Получим график функции $y = x^{-2}$ (рис. 71).

Заметим, что функция $y = x^n$ при нечётном отрицательном n (т. е. при $n = -3$; -5 и т. д.) обладает такими же свойствами, как и функция $y = x^{-1}$, а при чётном отрицательном n (т. е. при $n = -4$; -6 и т. д.) — такими же свойствами, как и функция $y = x^{-2}$. График функции $y = x^n$, где n — целое отрицательное число, состоит из двух ветвей; при нечётном n он расположен в первой и третьей координатных четвертях, а при чётном n — в первой и второй координатных четвертях. Ось x и ось y являются асимптотами для графика этой функции.

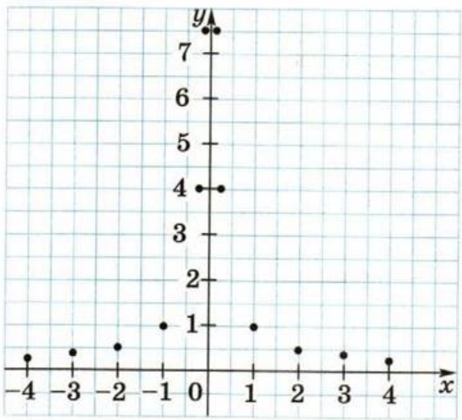


Рис. 70

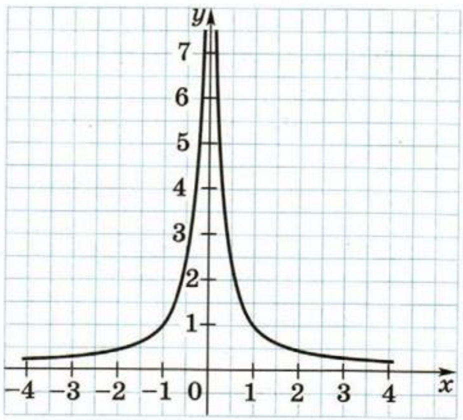


Рис. 71

Упражнения

1259. Постройте график функции $y = x^{-1}$, где $x > 0$. Используя свойства графика функции и вычисления, найдите:

а) значение y при $x = 0{,}1$; $0{,}2$; 6; 20;

б) значение x, при котором $y = 0{,}01$; $0{,}4$; 8; 20;

в) множество значений аргумента x, при которых $y < 0{,}1$; $y < 0{,}01$; $y < 0{,}001$; $y > 20$; $y > 100$.

1260. Сравните числа:

а) $0{,}57^{-1}$ и $0{,}75^{-1}$;

б) $0{,}92^{-1}$ и 1;

в) $2{,}38^{-1}$ и $2{,}19^{-1}$;

г) $1{,}047^{-1}$ и 1.

1261. Принадлежит ли графику функции $y = x^{-1}$ точка:

а) $A\left(3;\ \frac{1}{3}\right)$; б) $B\left(-\frac{1}{7};\ -7\right)$; в) $C(25;\ 0{,}04)$; г) $D(-0{,}5;\ 2)$?

1262. Постройте в одной системе координат графики функций $y = x$ и $y = x^{-1}$. Ответьте на вопросы:

а) при каких положительных значениях аргумента верны равенство $x^{-1} = x$ и неравенства $x^{-1} < x$, $x^{-1} > x$;

б) при каких отрицательных значениях аргумента верны равенство $x^{-1} = x$ и неравенства $x^{-1} < x$, $x^{-1} > x$?

1263. Докажите, что если точка $A(a;\ b)$ принадлежит графику функции $y = x^{-1}$, то точка $B(b;\ a)$ также принадлежит графику этой функции.

1264. Постройте график функции $y=\begin{cases}x^{-1}, \text{ если } 0<x\leqslant 1,\\ x, \text{ если } x>1.\end{cases}$

Найдите:

а) значение функции при $x = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 1;\ 2;\ 6$;

б) значения аргумента x, при которых $y = 1{,}5;\ 3;\ 4$.

1265. Постройте график функции $g(x)=\begin{cases}x^{-1}, \text{ если } x\geqslant \frac{1}{2},\\ x+1{,}5, \text{ если } x<\frac{1}{2}.\end{cases}$

Найдите:

а) $g(-2)$, $g(0)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$, $g(1)$, $g(-2{,}5)$;

б) значения x, при которых $g(x) = 0$; $g(x) = -2$; $g(x) = 0{,}5$.

1266. Используя график функции $y = x^{-2}$ (см. рис. 71), найдите:

а) значение y при $x = 0{,}6;\ -0{,}6;\ 1{,}2;\ -1{,}2$;

б) значения x, при которых $y = 0{,}7;\ 1;\ 3$;

в) множество значений аргумента x, при которых $y < 1$; $y > 1$.

1267. Сравните числа:

а) $0{,}85^{-2}$ и $0{,}63^{-2}$; в) $(-0{,}365)^{-2}$ и $(0{,}365)^{2}$;

б) $5{,}71^{-2}$ и $6{,}23^{-2}$; г) $(-1{,}25)^{-2}$ и $(2{,}25)^{-2}$.

1268. Принадлежит ли графику функции $y = x^{-2}$ точка:

а) $K\left(8;\ \frac{1}{64}\right)$; б) $L\left(-2;\ -\frac{1}{4}\right)$; в) $P\left(-\frac{1}{3};\ 9\right)$; г) $Q(-0{,}5;\ 4)$?

1269. Постройте в одной системе координат графики функций $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$, где $x > 0$. Пользуясь графиками, сравните:

а) $0{,}375^{-2}$ и $0{,}375^{-1}$;

б) $2{,}45^{-2}$ и $2{,}4^{-1}$.

1270. Расположите в порядке возрастания числа:

$$5{,}7^{-3};\quad 6{,}8^{-3};\quad 5{,}7^{-1};\quad 5{,}7^{5};\quad 6{,}8^{5};\quad 6{,}8^{-1}.$$

1271. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^{-2}, & \text{если } x \geqslant \frac{1}{2}; \\ 4, & \text{если } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}; \\ x^{-2}, & \text{если } x \leqslant -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Найдите:

а) значение функции при $x = -\frac{1}{3}$; 0; $\frac{1}{4}$; -1; 2;

б) значения аргумента, при которых $y = \frac{1}{4}$; 1; 4.

Упражнения для повторения

1272. Запишите в стандартном виде число и укажите значащую часть и порядок числа:

а) 230 000; в) 0,000285;

б) 40 900; г) 0,00705.

1273. В одной системе координат постройте графики функций $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, где $x \geqslant 0$. Пользуясь графиками, расположите в порядке возрастания числа:

а) 0,75; $0{,}75^2$; $0{,}75^3$;

б) $1{,}32^2$; 1,32; $1{,}32^3$.

1274. Докажите, что при любых допустимых значениях переменных a и b значение дроби не зависит от значений этих переменных:

а) $\dfrac{10(a-b)^2}{(5a-5b)^2}$; б) $\dfrac{(2x-3y)^2+24xy}{(x+1{,}5y)^2}$.

1275. Найдите значение дроби $\dfrac{4x^2+6xy+9y^2}{8x^3-27y^3}$, зная, что $x - 1{,}5y = 50$.

53. Обратная пропорциональность и её график

Вы знаете, что прямая пропорциональность — это функция, которую можно задать формулой $y = kx$, где k — не равное нулю число.

При положительных значениях аргумента и $k > 0$ эта функция обладает свойством: при увеличении значений x в несколько раз соответствующие значения y увеличиваются во столько же раз. В таких случаях говорят, что значения x *прямо пропорциональны* соответствующим значениям y, а переменная y *пропорциональна* x.

Рассмотрим функцию $y = k \cdot \frac{1}{x}$ при $k > 0$, где независимая переменная x принимает положительные значения.

Согласно формуле $y = k \cdot \frac{1}{x}$ значения y прямо пропорциональны числам, обратным значениям x. Это значит, что с увеличением значений x в несколько раз соответствующие значения y уменьшаются во столько же раз.

В таких случаях говорят, что переменная y *обратно пропорциональна переменной* x, а саму функцию называют *обратной пропорциональностью*.

Так же как и прямая пропорциональность, обратная пропорциональность находит широкое применение на практике.

Например:

— время, затраченное на прохождение одного и того же пути, обратно пропорционально скорости движения;

— количество товара обратно пропорционально цене этого товара при одной и той же сумме денег, затраченных на его покупку;

— длина a (в см) стороны прямоугольника обратно пропорциональна его ширине b (в см) при постоянной площади S (в см^2) прямоугольника.

В дальнейшем функцию $y = \frac{k}{x}$ мы будем рассматривать при любом $k \neq 0$ и любых положительных и отрицательных значениях аргумента.

Определение. Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой $y = \frac{k}{x}$, где x — независимая переменная и k — не равное нулю число.

Число k называют *коэффициентом обратной пропорциональности*.

Областью определения функции, заданной формулой $y = \frac{k}{x}$, является множество действительных чисел, отличных от нуля, так как выражение $\frac{k}{x}$ имеет смысл при любых x, где $x \neq 0$.

Теперь выясним, что представляет собой график обратной пропорциональности.

Вам известно, что графиком функции $y = x^{-1}$, т. е. функции $y=\frac{1}{x}$, является гипербола, и вы знаете, как можно построить график функции $y = kf(x)$, если известен график функции $y = f(x)$. Опираясь на эти сведения, легко построить график любой функции $y=\frac{k}{x}$, зная график функции $y=\frac{1}{x}$.

При $k > 0$ график функции $y=\frac{k}{x}$ получается из графика функции $y=\frac{1}{x}$ путём его растяжения от оси x в k раз, если $k > 1$, или его сжатия к оси x в $\frac{1}{k}$ раз, если $0 < k < 1$.

При $k < 0$ график функции $y=\frac{k}{x}$ получается из графика функции $y=\frac{-k}{x}$ (здесь $-k$ — положительное число) в результате симметрии относительно оси x.

График функции $y=\frac{1}{x}$ — гипербола. График функции $y=\frac{k}{x}$ также называют *гиперболой*.

Область определения функции $y=\frac{k}{x}$ — множество действительных чисел, кроме числа 0.

Перечислим сначала свойства функции $y=\frac{k}{x}$, где $k > 0$, и отметим особенности её графика.

1. При любых положительных значениях аргумента функция принимает положительные значения; при любых отрицательных значениях аргумента — отрицательные значения.

Из этого свойства следует, что график функции расположен в первой и в третьей координатных четвертях. График состоит из двух отдельных ветвей.

2. Любым противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.

Значит, точки графика, имеющие противоположные абсциссы, расположены симметрично относительно начала координат, т. е. график функции симметричен относительно начала координат.

3. Если $x > 0$ и $x \to +\infty$, то $y \to 0$; если $x > 0$ и $x \to 0$, то $y \to +\infty$. Если $x < 0$ и $x \to -\infty$, то $y \to 0$; если $x < 0$ и $x \to 0$, то $y \to -\infty$.

Из этого следует, что ось x и ось y являются асимптотами гиперболы.

4. Область значений функции есть множество действительных чисел, отличных от нуля.

В качестве примера функции $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, построим график функции $y = \frac{6}{x}$.

Перечисленные выше свойства показывают, каким должен быть вид графика функции $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$.

Для построения конкретного графика (при $k = 6$) следует вычислить координаты нескольких точек графика, построить их и через них провести плавные линии (в первой и в третьей координатных четвертях).

Составим таблицу для некоторых положительных значений аргумента.

x	1	2	3	4	5	6
y	6	3	2	1,5	1,2	1

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых записаны в таблице, и точки с противоположными координатами, т. е. точки $(-1; -6)$, $(-2; -3)$, $(-3; -2)$, $(-4; -1{,}5)$, $(-5; -1{,}2)$, $(-6; -1)$.

Через них проведём ветви гиперболы. Получим график функции $y = \frac{6}{x}$ (рис. 72).

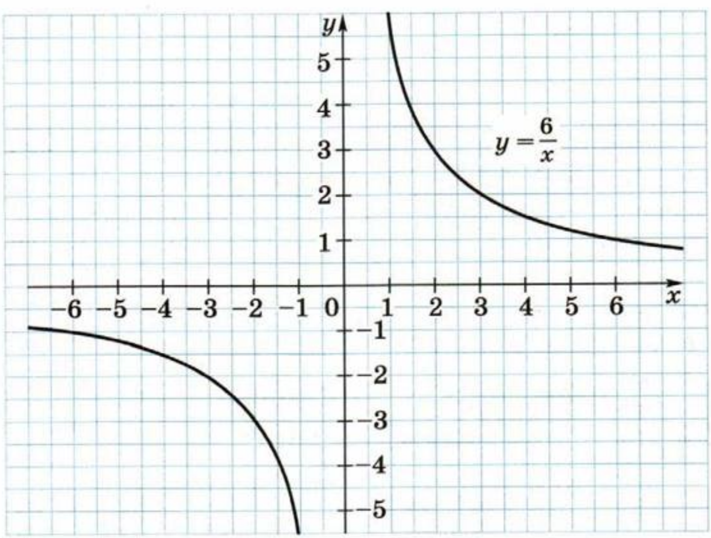


Рис. 72

Перечислим теперь свойства функции $y = \frac{k}{x}$, где $k < 0$, и отметим особенности её графика.

1. При любых положительных значениях аргумента функция принимает отрицательные значения; при любых отрицательных значениях аргумента функция принимает положительные значения.

График функции расположен в четвёртой и второй координатных четвертях и состоит из двух отдельных ветвей.

2. Любым противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.

График функции симметричен относительно начала координат.

3. Если $x > 0$ и $x \to +\infty$, то $y \to 0$; если $x > 0$ и $x \to 0$, то $y \to -\infty$.
Если $x < 0$ и $x \to -\infty$, то $y \to 0$; если $x < 0$ и $x \to 0$, то $y \to +\infty$.

Отсюда следует, что ось x и ось y являются асимптотами гиперболы.

4. Область значений функции есть множество действительных чисел, отличных от нуля.

В качестве примера функции $y = \frac{k}{x}$, где $k < 0$, построим график функции $y = -\frac{12}{x}$.

Составим таблицу для некоторых отрицательных значений аргумента.

x	−12	−6	−4	−3	−2	−1
y	1	2	3	4	6	12

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых записаны в таблице, и точки с противоположными координатами: (12; −1), (6; −2), (4; −3), (3; −4), (2; −6), (1; −12).

Через эти точки проведём ветви гиперболы. Получим график функции $y = -\frac{12}{x}$ (рис. 73).

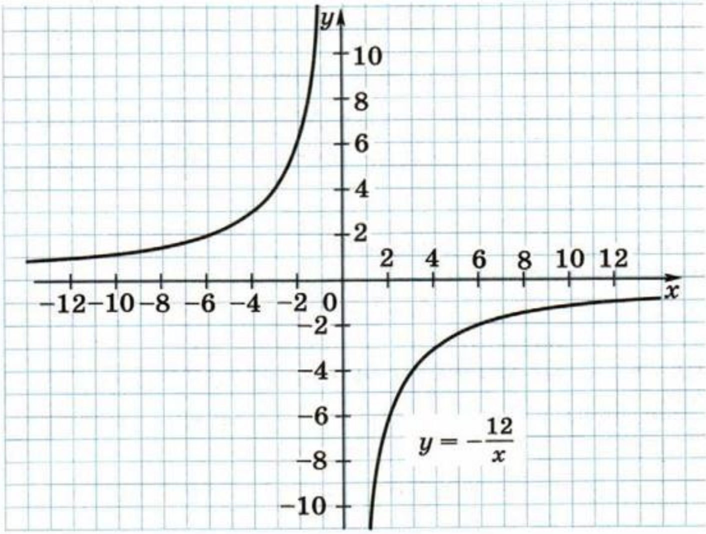


Рис. 73

Упражнения

1276. Используя график функции $y = \frac{6}{x}$ (см. рис. 72), найдите:

а) значение y, соответствующее значению x, равному 1,5; 2,5; −1,5; −4,5;

б) значение x, которому соответствует значение y, равное 2,5; 5; −1,5; −4;

в) промежутки, в которых $y > 0$ и в которых $y < 0$.

1277. Используя график функции $y = -\frac{12}{x}$ (см. рис. 73), найдите:

а) значение y, соответствующее значению x, равному 1,5; 8; −1,5; −2,5;

б) значение x, которому соответствует значение y, равное 2,5; 8; −4,5; −2,5;

в) промежутки, в которых $y > 0$ и в которых $y < 0$.

1278. Постройте график функции $f(x) = \frac{4}{x}$. Найдите:

а) $f(2{,}5)$; $f(5)$; $f(-1{,}2)$; $f(-5)$;

б) значение аргумента x, при котором $f(x) = 6$; $f(x) = -2{,}5$.

1279. Принадлежит ли графику функции $y = \frac{10}{x}$ точка:

а) $A(20;\ 0{,}5)$; в) $C(-4;\ 2{,}5)$;

б) $B\left(-30;\ -\frac{1}{3}\right)$; г) $D(25;\ 0{,}4)$?

1280. Функция задана формулой $g(x)=\frac{200}{x}$. Найдите расстояние до точки M, принадлежащей графику функции g:

а) от оси x, если абсцисса точки M равна 10; -100; 200; -4000; 10 000;

б) от оси y, если ордината точки M равна 5; 80; -400; 20 000; $-100\,000$.

1281. Найдите коэффициент k обратной пропорциональности, зная, что её графику принадлежит точка:

а) $A(3{,}5;\ 8)$; б) $B(-4{,}5;\ -4)$; в) $C(0{,}0016;\ -625)$.

1282. Задайте формулой обратную пропорциональность, если известно, что её график проходит через точку:

а) $K(3;\ 4)$; в) $P(-3{,}5;\ 2)$;

б) $L(-2{,}5;\ -2)$; г) $Q\left(6\frac{1}{4};\ -4\right)$.

1283. Расстояние между городами 4000 км самолёт, двигаясь со скоростью v км/ч, пролетает за t ч. Выразите формулой зависимость:

а) t от v;

б) v от t.

1284. Площадь прямоугольного треугольника равна 2,5 см^2. Один его катет равен x см, другой y см. Выразите формулой зависимость y от x. Постройте график этой зависимости.

1285. На рисунке 74 построен график функции, выражающей зависимость времени движения автомобиля, которое он тратит на путь от пункта A до пункта B, от его скорости. Используя график, ответьте на следующие вопросы:

1. Каково расстояние от пункта A до пункта B?
2. Сколько времени потребуется автомобилисту на путь от пункта A до пункта B, если он будет двигаться со скоростью 30 км/ч; 60 км/ч; 120 км/ч?
3. С какой скоростью надо двигаться автомобилю, чтобы проехать путь от пункта A до пункта B за 2 ч; за 1,5 ч; за 2 ч 24 мин?

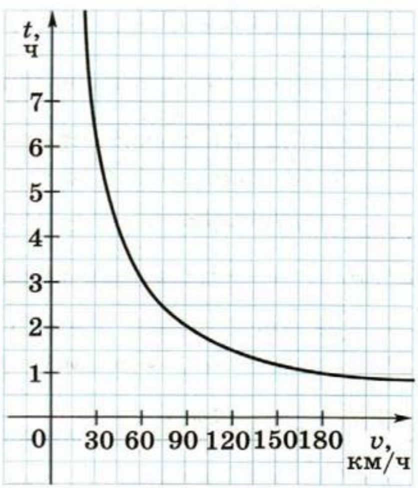


Рис. 74

1286. Постройте график функции:

а) $y = \frac{6}{x-2}$; в) $y = -\frac{4}{x+1}$;

б) $y = \frac{6}{x} - 1$; г) $y = 3 - \frac{4}{x}$.

Упражнения для повторения

1287. Известно, что $f(x) = x^2 + 1$. Найдите:

а) $f(0) + f(1) + f(-1)$; б) $f(2) + 2f(3) + 3f(4)$.

1288. Найдите все целые значения x, при которых дробь $\frac{x^2 + 2x - 4}{x+1}$ принимает целые значения.

1289. Изобразите схематически график функции:

а) $y = \frac{1}{2}(x-2)^3$; б) $y = -x^3 + 1$.

1290. Упростите выражение $\left(\frac{m+1}{m-1} - \frac{m-1}{m+1}\right) : \left(\frac{m^2+1}{m^2-1} - \frac{m^2-1}{m^2+1}\right)$.

54. Дробно-линейная функция и её график

Рассмотрим функции, заданные формулами $y = \frac{3x-5}{2x+4}$, $y = \frac{8}{5x-6}$, $y = \frac{7x-1}{10x}$. Правые части этих формул имеют вид рациональной дроби, у которой числитель — двучлен первой степени или число, отличное от нуля, а знаменатель — двучлен первой степени.

Из функций такого вида исключим функции, у которых правая часть — сократимая дробь, как, например, у функции $y = \frac{6x-12}{2x-4}$. Тогда получим семейство функций, которое называют *дробно-линейными функциями*.

Определение. **Функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, где буквой x обозначена независимая переменная, а буквами a, b, c и d — произвольные числа, причём $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$, называется дробно-линейной функцией.**

Ограничения $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$ существенны. Если $c = 0$, то мы получаем линейную функцию, а при $ad - bc = 0$ — сократимую дробь, значение которой равно $\frac{b}{a}$, т. е. константу. Действительно, выразив коэффициент c из равенства $ad - bc = 0$ через a, b и d, найдём, что $c = \frac{ad}{b}$. Подставив значение c в формулу $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, получим:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+b}{\frac{ad}{b}x+d} = \frac{(ax+b)b}{d(ax+b)} = \frac{b}{d}.$$

Покажем, что графиком дробно-линейной функции является гипербола. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Построим график функции $y = \frac{x+4}{x-2}$.

Выделим из дроби $\frac{x+4}{x-2}$ целую часть. Имеем:

$$\frac{x+4}{x-2} = \frac{x-2+6}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{6}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2}.$$

График функции $y = \frac{6}{x-2} + 1$ можно получить из графика функции $y = \frac{6}{x}$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига на 2 единицы вправо вдоль оси x и сдвига на 1 единицу вверх в направлении оси y. При этих сдвигах переместятся асимптоты гиперболы $y = \frac{6}{x}$: прямая $x = 0$ (т. е. ось y) — на 2 единицы вправо, а прямая $y = 0$ (т. е. ось x) — на 1 единицу вверх.

Прежде чем строить график, проведём на координатной плоскости пунктиром асимптоты: прямые $x = 2$ и $y = 1$.

Учитывая, что гипербола состоит из двух ветвей, для построения каждой из них составим две таблицы: одну для $x > 2$, а другую для $x < 2$.

x	1	0	−1	−2	−4	−10
y	−5	−2	−1	−0,5	0	0,5

x	3	4	5	6	8	12
y	7	4	3	2,5	2	1,6

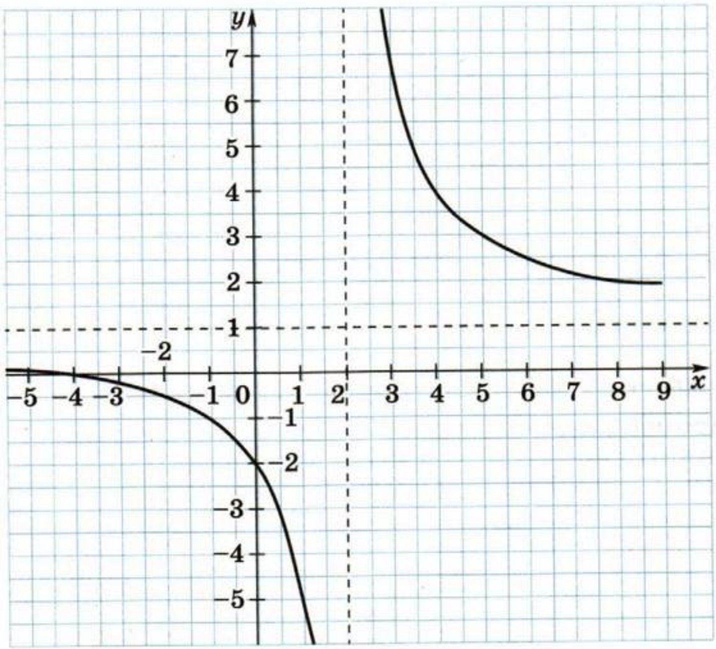


Рис. 75

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых записаны в первой таблице, и соединим их плавной непрерывной линией. Получим одну ветвь гиперболы. Аналогично, воспользовавшись второй таблицей, получим вторую ветвь гиперболы. При построении нужно учитывать свойства функции $y=\frac{6}{x}$ (график функции $y=\frac{6}{x-2}+1$ должен выглядеть так же, как и график функции $y=\frac{6}{x}$, если бы осями координат были прямые $x = 2$ и $y = 1$). График функции $y=\frac{x+4}{x-2}$ изображён на рисунке 75.

Пример 2. Построим график функции $y=-\frac{2x+10}{x+3}$.

Выделим из дроби $\frac{2x+10}{x+3}$ целую часть. Получим:

$$\frac{2x+10}{x+3}=\frac{2(x+3)+4}{x+3}=2+\frac{4}{x+3}.$$

Отсюда $y=-\frac{4}{x+3}-2$.

Заметим, что выделение целой части из дроби $\frac{2x+10}{x+3}$ можно выполнить иначе. Разделим двучлен $2x + 10$ на двучлен $x + 3$:

$$\begin{array}{r|l} -\,2x+10 & x+3 \\ \cline{2-2} 2x+6 & 2 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Значит, $\frac{2x+10}{x+3} = 2 + \frac{4}{x+3}$. Следовательно, $y = -\frac{4}{x+3} - 2$.

График функции $y = -\frac{4}{x+3} - 2$ можно получить из графика функции $y = -\frac{4}{x}$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига на 3 единицы влево и сдвига на 2 единицы вниз.

Асимптоты гиперболы — прямые $x = -3$ и $y = -2$.

Составим две таблицы для $x < -3$ и для $x > -3$.

x	−2	−1	1	2	7
y	−6	−4	−3	−2,8	−2,4

x	−4	−5	−7	−8	−11
y	2	0	−1	−1,2	−1,5

Построив точки в координатной плоскости и проведя через них ветви гиперболы, получим график функции $y = -\frac{2x+10}{x+3}$ (рис. 76).

Докажем теперь, что графиком любой дробно-линейной функции является гипербола, которая получается из графика функции $y = \frac{k}{x}$ с помощью параллельных переносов вдоль осей координат. Для этого нужно показать, что формулу

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

можно представить в виде

$$y = \frac{k}{x-m} + n,$$

где k, m и n — числа, определяемые значениями коэффициентов a, b, c и d, причём $k \neq 0$.

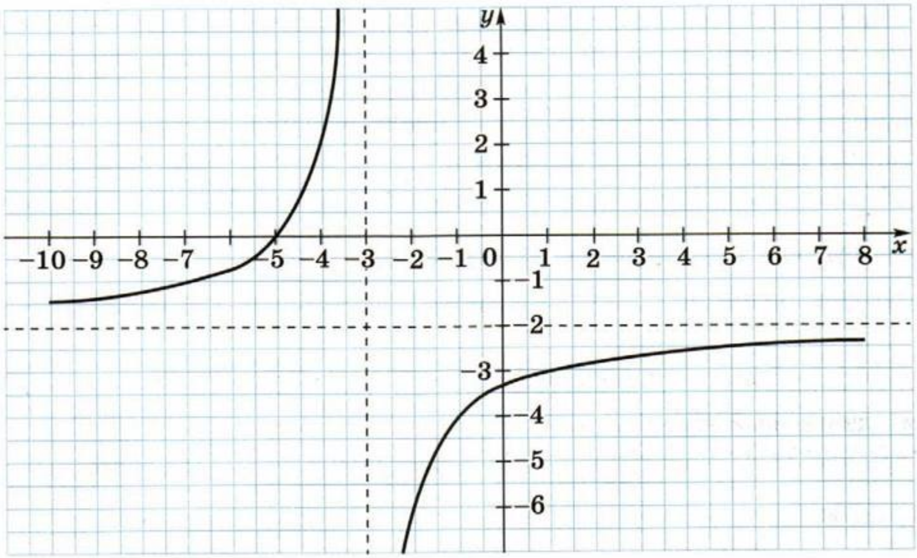


Рис. 76

Выделим из дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ целую часть, учитывая, что $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$. Для этого разделим двучлен $ax + b$ на двучлен $cx + d$:

$$\begin{array}{r|l} -\,ax+b & cx+d \\ \cline{2-2} ax+\frac{ad}{c} & \frac{a}{c} \\ \cline{1-1} b-\frac{ad}{c} & \end{array}$$

Значит, $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}$.

Разделив числитель и знаменатель последней дроби на c, получим

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x-\left(-\frac{d}{c}\right)}.$$

Пусть $\frac{a}{c} = n$, $\frac{bc-ad}{c^2} = k$ и $-\frac{d}{c} = m$.

Тогда $\frac{ax+b}{cx+d} = n + \frac{k}{x-m}$.

Значит, произвольную дробно-линейную функцию можно задать формулой

$$y = \frac{k}{x-m} + n, \text{ где } k \neq 0.$$

Ранее было показано, что график функции $y = f(x - m) + n$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига вдоль оси x на $|m|$ единиц вправо, если $m > 0$, или на $|m|$ единиц влево, если $m < 0$, и сдвига вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, или на $|n|$ единиц вниз, если $n < 0$. Следовательно, график функции $y = \frac{k}{x - m} + n$ можно получить из графика функции $y = \frac{k}{x}$ с помощью двух соответствующих параллельных переносов.

График функции $y = \frac{k}{x}$ — гипербола, значит, и график функции $y = \frac{k}{x - m} + n$ также является гиперболой, для которой прямые $x = m$ и $y = n$ являются асимптотами.

Так как $m = -\frac{d}{c}$ и $n = \frac{a}{c}$, то для гиперболы $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ асимптотами являются прямые:

$$x = -\frac{d}{c} \quad \text{и} \quad y = \frac{a}{c}.$$

При построении конкретного графика дробно-линейной функции нужно формулу $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ представить в виде $y = \frac{k}{x - m} + n$. При этом к такому виду можно приводить дробь $\frac{ax + b}{cx + d}$ как путём выделения из неё целой части (как это было показано в примерах 1 и 2), так и с помощью формул: $k = \frac{bc - ad}{c^2}$, $m = -\frac{d}{c}$ и $n = \frac{a}{c}$. Первый способ в большинстве случаев более предпочтителен.

Упражнения

1291. Постройте график функции:

а) $y = \frac{6}{x - 3} + 2$; в) $y = \frac{-8}{x - 2} + 1$;

б) $y = \frac{-6}{x + 3} - 2$; г) $y = \frac{-8}{x + 2} - 1$.

1292. Найдите область определения и область значений функции f, если:

а) $f(x) = \frac{9}{x - 5} + 2$;

б) $f(x) = \frac{17}{x + 6} - 4$.

1293. Укажите асимптоты гиперболы — графика функции:

а) $y = \frac{19}{x-7} - 4$; г) $y = -\frac{12}{x+6} - 10$;

б) $y = \frac{21}{x+8} + 5$; д) $y = \frac{x-5}{3x+6}$;

в) $y = -\frac{6}{x-4} + 9$; е) $y = \frac{2x+1}{8x-1}$.

1294. Докажите, что графиком функции g является прямая с «исключённой точкой», и найдите координаты этой точки, если:

а) $g(x) = \frac{8x-40}{3x-15}$; б) $g(x) = -\frac{6x+42}{12x+84}$.

1295. Постройте график функции:

а) $y = \frac{3x-2}{x-2}$; б) $y = -\frac{2x}{x-3}$.

Найдите нули функции и промежутки, в которых $y < 0$ и $y > 0$.

1296. Докажите, что графиком функции

$$y = \frac{3x^3 + 6x}{x^3 - 9x^2 + 2x - 18}$$

является гипербола.

1297. Постройте график функции $g(x) = \begin{cases} -\frac{2x-8}{x+2}, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ x - 4, \text{ если } 4 < x \leqslant 7. \end{cases}$

Решите уравнение:

а) $g(x) = 4$; б) $g(x) = 3$; в) $g(x) = 1$; г) $g(x) = 0$.

1298. Решите графически уравнение:

а) $3 - \frac{6}{2-x} = x^2$;

б) $\sqrt{2+x} = -1 - \frac{2}{x}$.

1299. Найдите все точки графика функции $y = \frac{8x-1}{x-1}$ с целыми координатами.

1300. Докажите, что графиком функции $y = \frac{2x^2 - 8x}{x^2 - 7x + 12}$ является гипербола с «исключённой точкой». Найдите координаты этой точки.

1301. Укажите, графиком какой из функций является гипербола:

$$y=\frac{5}{x+4},\quad y=\frac{2x-7}{3},\quad y=\frac{x^2-25}{x+5},$$

$$y=\frac{7x}{x+8},\quad y=\frac{9x-24}{9x-27},\quad y=(2x+5)(3x-9)^{-1}.$$

Упражнения для повторения

1302. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^2b^{-2}-a^{-2}b^2}{a^{-2}+b^{-2}}$; б) $\dfrac{x^4y^{-2}-x^{-2}y^4}{x^2y^{-2}+x^{-2}y^2+1}$.

1303. Докажите, что при любых значениях переменных верно неравенство:

а) $x^2+y^2+2 \geqslant 2(x+y)$;

б) $a^2+b^2+c^2 \geqslant 2(ac+bc-ab)$.

1304. Найдите область определения и область значений функции:

а) $f(x)=\dfrac{x^4-81}{x^2-9}$; б) $g(x)=\dfrac{x^2-25}{x+5}$.

1305. График функции $y=\dfrac{k}{x}$ проходит через точку $(-2; 4)$. Найдите значение k и постройте этот график.

? Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте свойства функций $y=x^{-1}$ и $y=x^{-2}$, отметьте особенности их графиков.
2. Что называется асимптотой кривой?
3. Какая функция называется обратной пропорциональностью?
4. Начертите схематически график функции $y=\dfrac{k}{x}$ при $k>0$ и перечислите свойства этой функции.
5. Начертите схематически график функции $y=\dfrac{k}{x}$ при $k<0$ и перечислите свойства этой функции.
6. Какая функция называется дробно-линейной функцией? Приведите примеры таких функций.
7. Как строят графики дробно-линейных функций?

Дополнительные упражнения к главе 7

К параграфу 16

1306. Зная, что $f(x) = x^3 + x + 2$, найдите:

а) $f(3) + f(1)$; в) $f(-3) + f(3)$;

б) $f(-3) + f(2)$; г) $f(a) + f(-a)$, где $a \in \boldsymbol{R}$.

1307. Функция $g(x) = x^2 - x - 6$ задана на множестве целых чисел, принадлежащих промежутку $[-3; 4]$. Найдите область значений функции.

1308. Известно, что $\varphi(x) = 2x - 5$. При каких значениях x верно равенство:

а) $\varphi(x + 3) = \varphi(3x)$; в) $2\varphi(x) = -\varphi(x - 1)$;

б) $\varphi(-x) = \varphi(4x + 1)$; г) $3\varphi(x - 1) = 4\varphi(x + 2)$?

1309. Пусть $f(x) = \begin{cases} x+4, \text{ если } -6 \leqslant x < -1, \\ -x+2, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x, \text{ если } 1 < x \leqslant 5. \end{cases}$

Найдите:

а) область определения функции $D(f)$;

б) значение функции $f(-5)$, $f(1)$, $f(4)$;

в) область значений функции $E(f)$;

г) значения аргумента x, при которых $f(x) = 0$, $f(x) = 2$, $f(x) = 3$, $f(x) = 4$.

1310. Функция задана формулой $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{|x|}{x}$.

Найдите:

а) область определения функции $D(g)$;

б) значения функции $g(-4)$, $g(-1)$, $g(2)$, $g(4)$;

в) область значений функции $E(g)$;

г) значения аргумента x, при которых $g(x) = -6$, $g(x) = 0$, $g(x) = 1$, $g(x) = 6$.

1311. Известно, что $f(x) = 0{,}5x - 1$. Постройте график функции:

а) $y = 2f(x)$; б) $y = -f(x)$; в) $y = -\frac{1}{2}f(x)$.

1312. Графиком функции $y = f(x)$ служит ломаная линия $ABCD$, где $A(-4; -2)$, $B(-1; 4)$, $C(2; 1)$, $D(6; 3)$. Постройте график функции:

а) $y = f(x)$; в) $y = \frac{1}{2}f(x)$; д) $y = 2f(x)$;

б) $y = -f(x)$; г) $y = -\frac{1}{2}f(x)$; е) $y = -2f(x)$.

1313. Изобразите схематически график функции:

а) $y = x^2 - 4x + 5$; в) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$;

б) $y = x^2 + 6x + 5$; г) $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 5$.

1314. Постройте график функции:

а) $y = -2|x - 1|$; б) $y = -|x - 3| + 1$.

Найдите нули функции и промежутки знакопостоянства.

1315. Задайте одной формулой функцию:

а) $y = \begin{cases} 8 - x, \text{ если } x \leqslant 8, \\ x - 8, \text{ если } x > 8; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} -x - 5, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x - 5, \text{ если } x > 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 8 - x, \text{ если } x < 1, \\ x + 6, \text{ если } x \geqslant 1; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} -x - 5, \text{ если } x \leqslant -3, \\ x + 1, \text{ если } x > -3. \end{cases}$

1316. Найдите все значения a, при которых точка $K(-3; 4)$ принадлежит графику функции:

а) $y = (x + a)^2 - 12$; б) $y = |x - a| + 3$.

1317. Известно, что точка $A(6; 13)$ принадлежит как графику функции $y = (x - 5)^2 + n$, так и графику функции $y = (x - m)^2 - 3$. Найдите числа m и n.

1318. Постройте график функции $y = \frac{12}{x}$ и найдите координаты точек пересечения (если они существуют) графика этой функции с прямой:

а) $y = 6$; в) $y = -x + 7$;

б) $y = 3x$; г) $y = -2x$.

1319. Найдите значения коэффициентов k и b, при которых прямая $y = kx + b$ и гипербола $y = \frac{k}{x}$ имеют общую точку:

а) $A(2; 3)$; б) $B(-3; 6)$.

1320. Докажите, что гипербола $y = \frac{9}{x}$ и прямая $y = -x + 6$ имеют только одну общую точку, и найдите её координаты.

1321. Докажите, что если точка $A(a; b)$ принадлежит гиперболе $y = \frac{k}{x}$, то и точка $B(b; a)$ принадлежит этой же гиперболе. Как расположены точки A и B относительно прямой $y = x$?

1322. Напишите уравнение какой-нибудь прямой, которая с гиперболой $y = \frac{6}{x}$:

а) имеет только одну общую точку;
б) имеет только две общие точки;
в) не имеет общих точек.

1323. Могут ли гипербола $y = \frac{k}{x}$ и прямая $y = ax + b$ иметь три общие точки?

1324. Постройте график функции:

а) $y = -|x|^{-1}$; б) $y = \frac{6}{|x|}$; в) $y = -\frac{4}{|x|}$.

1325. Функция задана формулой $f(x) = \frac{6}{|x-2|}$.

а) Найдите $f(-4)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$.
б) Докажите, что если $a \neq 0$, то $f(a + 2) = f(2 - a)$.
в) Найдите область значений функции.

1326. Укажите, в каких координатных четвертях нет ни одной точки графика функции:

$$y = \sqrt{x+16} + 2; \quad y = \sqrt{x-7} + 1; \quad y = \sqrt{x-6} - 6.$$

1327. Изобразите схематически график функции:

а) $y = \sqrt{x-4} + 2$;

б) $y = \sqrt{x+6} + 1$.

Укажите область определения и область значений функции.

1328. Докажите, что графики функций $y = \sqrt{x-5}$, где $x \geqslant 5$, и $y = x^2 + 5$, где $x \geqslant 0$, симметричны относительно прямой $y = x$.

1329. При каком значении a график функции $y = \sqrt{x-6}$ симметричен относительно прямой $y = x$ графику функции $y = x^2 + a$, где $x \geqslant 0$?

1330. Постройте график функции $y = \sqrt{x-1} + 4$. Пользуясь графиком, укажите множество значений x, при которых $y > 6$.

К параграфу 17

1331. Постройте в первой координатной четверти графики функций $y = x^n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$ и $-2 \leqslant n \leqslant 2$, выбрав за единицу масштаба на осях x и y 5 см (10 клеточек).

Как располагаются абсциссы точек пересечения прямой $y = a$ с графиками этих функций в случае:

а) $0 < a < 1$; б) $a = 1$; в) $a > 1$?

1332. Постройте график функции: $y = \begin{cases} x^{-2}, \text{ если } 1 < |x| < 3, \\ x^2, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

1333. Изобразите схематически график функции $y = x^{-3}$. Пользуясь графиком, сравните значения функции:

а) при $x = 2$ и $x = 3$;

б) при $x = -3$ и $x = -4$.

1334. Изобразите схематически график функции $f(x) = x^{-4}$. Пользуясь графиком, сравните значения функции:

а) при $x = 3$ и $x = 2$;

б) при $x = -3$ и $x = -2$.

1335. Точка M принадлежит графику функции $y = x^n$, где n — целое число. Найдите n, если:

а) $M(3;\ 9)$; в) $M\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$; д) $M(-3;\ 81)$;

б) $M(-2;\ -8)$; г) $M\left(-2; \frac{1}{16}\right)$; е) $M\left(-\frac{1}{2}; -32\right)$.

1336. Найдите область определения и постройте график функции, если:

а) $y = \frac{6x^2 - 24}{x^3 - 4x}$; б) $y = \frac{x^2 + 12x + 32}{x^2 - 16}$.

1337. Докажите, что при любом $x > 8$ функция $y = \frac{2x - 4}{x - 8}$ принимает значения, большие 2, а при $x < 8$ — значения, меньшие 2.

1338. Докажите, что при любом b, большем 8, или b, меньшем 8, прямая $y = -x + b$ пересекает график функции $y = \frac{16}{x}$ в двух точках.

1339. Найдите все точки графика функции

$$y = \frac{9x - 29}{x - 4}$$

с целыми координатами.

1340. Докажите, что существует только одна точка, координаты которой — натуральные числа, принадлежащая графику функций

$$y = \frac{6{,}5 - 2x}{0{,}5x - 1}.$$

1341. Постройте графики функций

$$y = \frac{6}{x} \quad \text{и} \quad y = \frac{7x - 43}{x - 7}$$

и найдите координаты общих точек этих графиков функций.

1342. Гипербола, асимптоты которой — прямые $x = 5$ и $y = 5$, пересекает гиперболу

$$y = \frac{4}{x}$$

в двух точках. Абсцисса одной из точек пересечения равна 4. Найдите координаты общих точек этих гипербол.

Задачи повышенной трудности

1343. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^4 - x^2 + 1}{x^8 + x^4 + 1}$; в) $\dfrac{a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1}{a^6 + 2a^3 + 1}$;

б) $\dfrac{y^2 - 1}{y^3 - 3y + 2}$; г) $\dfrac{b^7 - b^6 + b - 1}{b^3 - b^2 + b - 1}$.

1344. Упростите выражение:

а) $\dfrac{(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a + b - c)}{(a + b + c)(a^2 - b^2 + c^2 - 2ac)}$;

б) $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}$;

в) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{1}{(x+2)(x+3)} + \dfrac{1}{(x+3)(x+4)} + \ldots + \dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)} +$
$+ \dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}$;

г) $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{a+b} \cdot \left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right) + \dfrac{1}{(a+b)^2} \cdot \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)\right)$;

д) $\dfrac{\dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^3 + y^3} \cdot \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right)}{\dfrac{(x + y)^2 - xy}{(x - y)^2 + xy} \cdot \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}\right)}$;

е) $\left(1 + \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1}}}\right) \cdot \dfrac{x^3 - (x-1)^2}{x^2 + 2}$.

1345. Четырёхзначное число, в котором цифра единиц равна разности между цифрами тысяч и сотен, а цифра десятков равна нулю, является квадратом числа. Найдите это число.

1346. Докажите, что при любом целом n значение трёхчлена $2n^3 - 3n^2 + n$ кратно 6.

1347. Двузначное число таково, что произведение цифр этого числа является его делителем. Найдите все такие числа.

1348. Докажите, что если $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$, то верно равенство

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2.$$

1349. Докажите тождество:

$$\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{a_3}{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)}+\ldots+\frac{a_n}{(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})(a_1+a_2+\ldots+a_n)}=$$

$$=\frac{a_2+a_3+\ldots+a_n}{a_1(a_1+a_2+\ldots+a_n)}.$$

1350. Докажите, что при $a>0$, $b>0$, $c>0$ верно неравенство

$$a^2+b^2+c^2\geqslant\sqrt{abc}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

1351. Докажите, что если $n\in N$, то верно неравенство:

а) $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$; б) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2.$

1352. Решите неравенство $x^2+5y^2-4xy-6y+9\leqslant 0.$

1353. Докажите, что при любом натуральном n, отличном от 2, значение дроби $\frac{n^3-3n-2}{n^2-n-2}$ является натуральным числом.

1354. Натуральные степени числа 3 записаны в виде последовательности

$$3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ \ldots,\ 3^n,\ \ldots .$$

Какой цифрой оканчивается число в этой последовательности, стоящее на:

а) 4-м месте; в) 12-м месте; д) 6-м месте;
б) 8-м месте; г) 2-м месте; е) 10-м месте?

1355. Выполните подстановку $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{a}}\right)$ и упростите выражение $\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

1356. Упростите выражение $\frac{2b\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$, замените x выражением $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, где $a>0$ и $b>0$.

1357. Упростите выражение:

а) $\sqrt{6+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{8-2\sqrt{2}-2\sqrt{5}+2\sqrt{10}}$.

1358. Сравните значение выражений:

а) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\sqrt{1{,}05}$;

б) $\sqrt{9+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}$ и $\sqrt{9+2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2\sqrt{15}}$.

1359. Докажите тождество

$$\sqrt{\frac{x^2+2xy+9y^2}{x-2\sqrt{xy}+3y}-2y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

1360. Упростите выражение

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

1361. Решите уравнение:

а) $(x^2-3x+4)^2-5x(x-3)-14=0$;

б) $(x^2+6x)(x^2+6x+8)=105$;

в) $(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)=-15$;

г) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$.

1362. Докажите, что если между коэффициентами уравнений $x^2-px+q=0$ и $x^2+p_1x+q_1=0$ имеет место соотношение $pp_1=2(q+q_1)$, то по крайней мере одно из уравнений имеет корни.

1363. Найдите значение a, при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2-ax+a-1=0$ будет наименьшей.

1364. Найдите такое значение a, при котором один из корней уравнения $x^2-\frac{15}{4}x+a^3=0$ является квадратом другого. Найдите эти корни.

1365. Найдите значения параметра m, при которых уравнения

$$x^2-(2m+1)x+m+1=0 \quad\text{и}\quad 2x^2-(4m-1)x+1=0$$

имеют хотя бы один общий корень. Найдите этот корень.

1366. Решите уравнение:

а) $|2x|+x=6$; б) $|x+1|+|x-1|=2$.

1367. При каких значениях k решением системы $\begin{cases}x+ky=3,\\kx+4y=6\end{cases}$ является пара чисел, в которой $x>1$ и $y>0$?

1368. Прямая $y = x + 2$ пересекает параболу $y = x^2 - 3x + 2$ в двух точках A и B. Найдите на дуге AB параболы точку, наиболее удалённую от прямой AB.

1369. Постройте график функции $y = |x^2 - 4|$ и решите уравнение:

а) $|x^2 - 4| = 6$; в) $|x^2 - 4| = 2$;

б) $|x^2 - 4| = 4$; г) $|x^2 - 4| = 0$.

1370. Докажите, что при любом натуральном n, большем 1, выражение

$$7^{2n} - 4^{2n} - 297$$

делится на 264.

1371. Докажите, что при всех допустимых значениях x верно неравенство

$$-3 \leqslant \frac{|x|}{x} + \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-2|}{x-2} \leqslant 3.$$

1372. Докажите, что при $n \in N$ верно неравенство:

а) $\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 1$.

1373. Докажите, что если $a + b = 1$, то $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$.

1374. Докажите, что число $\underbrace{111...1}_{2n} - \underbrace{222...2}_{n}$ является квадратом натурального числа.

1375. Функция задана формулой $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

Докажите, что если $a > 1$, то $f\left(a + \frac{1}{a}\right) = a - \frac{1}{a}$.

1376. Область определения функции f — множество Z, а область значений — множество $\{-1; 1\}$. Функция обладает свойством: для любых целых a и b верно равенство $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$. Найдите $f(0)$ и соотношение между $f(-x)$ и $f(x)$.

1377. Область определения функции g — множество Z и $g(1) = k$, где $k \in Z$. Функция обладает свойством: $g(a + b) = g(a) + g(b)$ для любых целых a и b. Найдите $g(0)$ и соотношение между $g(-x)$ и $g(x)$. Задайте функцию g формулой.

1378. Трое рабочих, работая совместно, могут выполнить заказ за 42 мин. Первый из них, работая один, может выполнить работу вдвое медленнее второго и на 2 ч скорее третьего. За сколько времени может выполнить заказ каждый из них, работая отдельно?

1379. Из пунктов A и B выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста и встретились в 18 км от пункта B. Прибыв в пункты A и B, они сразу же повернули назад и встретились вновь на расстоянии 24 км от пункта A. Найдите расстояние от пункта A до пункта B.

1380. Две женщины привезли на рынок 210 кг яблок разных сортов. Продав яблоки по разной цене, обе выручили одинаковые суммы денег. Если бы первая продала столько же яблок, сколько и вторая, то она получила бы n р.; если бы вторая продала столько же яблок, сколько первая, то она получила бы $4n$ р. Сколько килограммов яблок было у каждой женщины?

1381. С какой средней скоростью прошёл автомобиль весь путь, если:

а) одну половину пути он прошёл со скоростью v_1 км/ч, а другую — со скоростью v_2 км/ч;

б) третью часть пути он прошёл со скоростью v_1 км/ч, а оставшуюся часть пути — со скоростью v_2 км/ч?

1382. Трёхзначное число оканчивается цифрой 8. Если эту цифру перенести на первое место, то получившееся число будет на 80 больше утроенного данного числа. Найдите первоначальное трёхзначное число.

1383. Четырёхзначное число является квадратом натурального числа, и у него цифры тысяч и десятков одинаковы, а цифра сотен на единицу больше цифры единиц. Найдите данное четырёхзначное число.

1384. Докажите, что графиком уравнения является пара пересекающихся прямых:

а) $xy + 3x - 5y - 15 = 0$; б) $y^2 + xy + 3 = 3x + 4y$.

1385. Докажите, что графиком уравнения является пара параллельных прямых:

а) $(y - 3)(y + 2) = 0$; в) $(x - 1)(x + 2) = 0$;

б) $x^2 - 7x + 12 = 0$; г) $y^2 + 2y - 15 = 0$.

1386. Постройте график уравнения:

а) $xy - 2x = 0$; г) $y^2 - 4 = 0$;

б) $(x + y)(y - 3) = 0$; д) $(x - 2y)^2 + (y - 3)^2 = 0$;

в) $x^2 - 9 = 0$; е) $(x^2 - y^2)^2 + (x^2 - 16)^2 = 0$.

ОТВЕТЫ

Глава 1

К параграфу 1. **2.** г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{x}{5}$; е) $\frac{17y}{7}$. **6.** д) $6\frac{7}{13}$; е) $-1\frac{42}{79}$. **7.** а) $\{x|x = \frac{1}{2k}$, $k \in N$, $k \leqslant 10\}$; б) $\{x|x = \frac{1}{3k}$, $k \in N$, $k \leqslant 6\}$; в) $\{x|x = \frac{1}{2k+1}$, $k \in N$, $k \leqslant 9\}$; г) $\{x|x = \frac{1}{3k+1}$, $k \in N$, $k \leqslant 6\}$. **9.** $t = \frac{24}{v-2}$; а) $\frac{2}{3}$ ч; б) 1,5 ч. **10.** $p = \frac{100b}{a}$; а) 20 %; б) 6 %. **11.** б) При $x \neq 2$ и $x \neq 7$; г) при $x \neq -2$, $x \neq 0$, $x \neq 2$. **12.** а) $\{y|y \neq -1,\ y \neq 1\}$; б) $\{y|y \neq -5,\ y \neq 0,\ y \neq 5\}$; г) $\{y|y \neq -3,\ y \neq 1\}$; е) $\{y|y \neq -1{,}5,\ y \neq -0{,}5,\ y \neq 0{,}5\}$. **13.** а) Все числа; б) $x \neq 0{,}5$, $x \neq -0{,}5$; в) $x \neq y$, $x \neq -y$; г) $x \neq 0$, $y \neq 0$. **14.** а) $x \neq 0$, $x \neq 1$; б) $x \neq 1$; в) все числа; г) $x \neq 1$, $x \neq -0{,}5$. **16.** а) $\{1; 2; 3; 6\}$; б) $\{-5; -1; 1; 5\}$; в) $\{2; 4; 6; 8; 14\}$; г) $\{-19; -3; -1; 15\}$. **17.** а) При $m \in \{-4; -1; 0; 3\}$; б) при $m \in \{0; 1; 2\}$; в) при $m = -1$; г) при $m \in \{0; 1\}$. **18.** д) При $y = -2$; е) при $y = 3$. **19.** а) При $x \in \{-2; 2\}$; б) при $x = 2$; в) при $x = 1$; г) таких значений нет. **22.** г) $(y - 3)(2x - 5y)$; д) $(a + 2)(a - 2)(a^2 + 4)$; е) $(7 - 6)^2(7 + b)^2$. **23.** а) $(x - 5)^2$; в) $(4a + 1)(1 - 2a)$; г) $4(b - 1)$. **26.** в) $\frac{ax+2a}{x^2-4}$; г) $\frac{-ax-2a}{4-x^2}$; д) $\frac{-3a}{6-3x}$. **28.** а) $\frac{5a^{2n}}{2}$; б) $\frac{3}{5b^n}$; в) $\frac{1}{3x^3}$; г) $\frac{13y^{2n-2}}{4}$. **29.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) 7; г) 4,5. **30.** г) $\frac{5a-10c}{2a}$; д) 32; е) $\frac{1}{(x-2y)^5}$. **33.** а) 0,75; б) $-\frac{1}{4}$; в) $\frac{3}{40}$; г) $-\frac{2}{3}$. **34.** а) $3x + y$; б) $\frac{1}{b^6-1}$; в) $\frac{a+b}{3}$; г) $\frac{5}{a-b}$; д) $\frac{5b-y}{b+2d}$; е) $\frac{3a+2b}{2b-1}$. **35.** а) $\frac{a^n+b^2}{a}$; б) $\frac{x^n}{x^2-y^2}$; в) $\frac{x^n+x^{n-1}}{x-2}$; г) $\frac{b+3}{b^2-3b}$. **36.** а) 1; б) 6. **37.** а) $-\frac{3}{7}$; в) $-\frac{7a}{8b}$; д) $\frac{3y-2x}{2}$; е) $2x - 3$. **38.** а) $\frac{a}{a-x}$; б) $-\frac{x+y}{a+b}$; в) $\frac{5-a}{3}$; г) $a + 2$. **40.** а) $\frac{1}{a^2-2a+2}$. Указание. Представьте знаменатель дроби $a^4 + 4$ в виде $(a^2 + 2)^2 - 4a^2$; б) $\frac{1}{b^2+b+1}$. Указание. Умножьте числитель и знаменатель дроби на $b - 1$; в) $\frac{1}{9x^2-3x+1}$. Указание. Умножьте числитель и знаменатель дроби на $9x^2 - 1$, представив дробь в виде $\frac{(27x^3-1)(3x+1)}{(27x)^6-1}$; г) $\frac{2y^2-1}{4y^4-2y^2-1}$. Указание. Представьте знаменатель дроби в виде $(4y^4)^2 - (2y^2 + 1)^2$ и разложите на множители, а числитель представьте в виде $(2y^2 - 1)(4y^4 + 2y^2 + 1)$; д) $\frac{x-5}{x+5}$. Указание. Представьте числитель и знаменатель дроби в виде квадратных трёхчленов, разложите их на множители и сократите дробь; е) $\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$; ж) $\frac{a^2+1}{a-1}$;

з) $\frac{a+2}{a-1}$. **42.** Указание. Графиком является прямая, заданная уравнением $2x - y - 1 = 0$, с выколотой точкой $(0; -1)$. **43.** а) $\frac{6a^2+4a+3}{2a-1}$; б) $\frac{2x^2-5x+4}{x+3}$. **44.** а) $\frac{1}{n+1}$; б) $n(n+1)$. **45.** а) 18; б) 20. **47.** а) 1; б) 1. Указание. Данный многочлен представьте в виде $(a - 2b + 5)^2 + 1$. **48.** а) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$; б) $\left(y-\frac{1}{3}\right)^2$; в) $(a-2)(a+2)(a^2+4)$; г) $(a^2-6a+18)(a^2+6a+18)$.

К параграфу 2. **52.** а) $\frac{1}{a^n+1}$; б) $\frac{b}{b^n-2}$; в) $2x^n - 2$; г) $\frac{y^n-6}{y}$. **53.** а) $2b$; б) $2a$; в) 1; г) $\frac{1}{a-5b}$; д) $\frac{3a+b}{3a-b}$; е) $\frac{x^2+2xy+4y^2}{x^2-4xy+4y^2}$. **54.** а) $\frac{3a+2b}{6x}$; б) $\frac{3c-4d}{72y}$; в) $\frac{x}{2y}$; г) $\frac{m}{2n}$; д) $\frac{5}{6}$; е) $\frac{1}{24}$. **56.** а) $\frac{2x^2-y^2}{x^2-xy}$; б) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; в) $\frac{6}{4x^2-9}$; г) $\frac{7}{6y+12}$; д) $\frac{2a-5}{10a-20}$; е) $\frac{5b-20}{8b-20}$. **58.** а) $\frac{a-3}{3a}$; б) $\frac{b-2}{2b}$; в) $\frac{1}{xy}$; г) $\frac{1}{xy}$; д) $\frac{2c^2+5c+6}{c^3-9c}$; е) $\frac{3d}{16-d^2}$. **59.** а) $\frac{n+2}{(n+1)!}$; б) $\frac{1-n}{n!}$. **61.** а) a^{n-1}; б) $\frac{1}{xy}$; в) 1. Указание. Сократите каждую дробь до выполнения вычитания; г) $6b^n$. **63.** г) $\frac{x^2+y^2}{2x}$; д) $\frac{p^2-8p}{p-4}$; е) $\frac{2cd}{c+d}$. **64.** а) 0; б) $\frac{1}{y-5}$; в) $-\frac{4}{b+c}$; г) $\frac{36}{a^4-18a^2+81}$; д) $\frac{2x-4}{x^2+2x+4}$; е) $\frac{2}{x+3}$. **65.** а) $\frac{x-6}{xy-4x-3y+12}$; б) $\frac{y^2+2y-10}{xy-5x+y-5}$; в) $\frac{b-2}{3a^2-2a}$; г) $\frac{2a^2}{a^2-b^2}$. **66.** а) 9; б) $3y$; в) x^2+2; г) x^2+2x+3. **68.** $\frac{24}{25}$. **69.** а) $\frac{4}{x^2+6x+5}$; б) $\frac{4}{x^2+10x+9}$. **70.** а) $\frac{16a^{15}}{a^{16}-65\,536}$; б) $\frac{16b^{30}}{b^{32}-1}$. **71.** а) $\frac{1}{x+2}$; б) 1; в) -12; г) $\frac{2a+2b}{a-b+c}$; д) 0. **72.** а) Корней нет; б) 2; в) -1; г) $-0{,}5$. **77.** $\frac{1}{2}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{2}{15}$. Указание. Дробь $\frac{1}{2}$ замените равной ей дробью, знаменателем которой является НОК(5, 6, 15), т. е. дробью $\frac{15}{30}$. Используя метод неопределённых коэффициентов, получим $\frac{15}{30}=\frac{a}{5}+\frac{b}{6}+\frac{c}{15}$. Отсюда $15 = 6a + 5b + 2c$. Положив $a = 1$, $b = 1$, найдём, что $c = 2$. **78.** а) $a = 1$; $b = 2$; б) $a=2$, $b=3$. **79.** а) $\frac{5x-1}{x(x-1)}=\frac{1}{x}+\frac{4}{x-1}$; е) $\frac{3x-4}{x^2+10x+24}=\frac{3x-4}{(x+4)(x+6)}=\frac{-8}{x+4}+\frac{11}{x+6}$. **80.** а) $\frac{6x+1}{4x^2-1}=\frac{1}{2x+1}+\frac{2}{2x-1}$; в) $\frac{x+17}{(2x-1)(3x+2)}=\frac{5}{2x-1}-\frac{7}{3x+2}$. **81.** а) $a^2 - 7a + 5$;

б) $2x^3 + 3x^2 - 5x - 7$; в) $y^2 - 4y - 5$; г) $4b^3 - b^2 - 2b + 3$. **82.** а) При $n = 1; 2; 3; 4; 6; 12$. д) при $n = 5$; е) при $n = 3$. **83.** а) $-3, 3$; б) $-16, -12, 0, 4$; в) $-1, 1, 8, 64, 125, 343$. **84.** а) 1; б) 0; в) 9. **86.** $(0; -3)$, $(1; -3)$, $(3; 3)$, $(4; 3)$. **87.** а) $y = 3$, $y = 2x - 1$; б) $y = x + 2$, $y = 2x$; в) таких прямых не существует. **90.** $-\frac{1}{8}$. **91.** $t = \frac{2sv}{v^2 - 9}$, 3 ч 40 мин.

К параграфу 3. **94.** в) $-a^n$; г) $(x^n - 1)^2$. **96.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{x-3}{3x}$; в) $\frac{5x-5}{x}$; г) $\frac{a+5b}{a-5b}$; д) $\frac{2x+6}{x-7}$; е) $\frac{5}{y+1}$. **98.** а) $\frac{1}{3x-xy}$; б) $\frac{1}{x-y}$; в) $\frac{1}{x-6}$; г) $\frac{a-b}{a+b}$. **99.** а) $\frac{1}{a+2}$; б) $-\frac{y+2}{2x^2+xy}$; в) $\frac{6}{x^2+6x}$; г) $\frac{y^2+y-2}{y^2-y-2}$. **100.** ж) $\frac{(x-7)^3}{(x-5)^3}$; з) $\frac{36(a+3)^2}{(a-3)^4}$. **101.** в) $-\frac{x^6}{y^6}$; г) $\frac{(a+6)^4}{(b+6)^4}$. **102.** а) $\frac{3y-10}{3y+5} = -4$; б) $\frac{x-5}{60x} = -0{,}4$. **103.** a. **105.** 48 км. **108.** а) $\frac{a^2}{8b^2}$; б) $x^{n-1}y^{n+2}$; в) $\frac{25a^{n+2}bd^{n-1}}{2c^n}$; г) $\frac{x^2y^2}{p^{n-1}q^{n-1}}$. **110.** г) $\frac{2x^2y-2xy^2}{5}$; д) $\frac{9a+7b}{ab}$; е) $\frac{2(a+5)^2}{3a}$. **111.** г) $\frac{3a+3b}{2a-2b}$; д) $\frac{p^2-3pq}{p^2q+2pq^2-3q^3}$; е) $\frac{2b^2-ab}{3a}$. **112.** а) -2; б) не имеет смысла. **113.** в) $\frac{5xy}{2}$; г) 1. **114.** а) $\frac{(x-b)^2}{(x+b)^2}$; б) $\frac{y-5}{y+5}$; в) $\frac{ab-6a-3b+18}{ab+5a+7b+35}$; г) $\frac{a^2-4}{2b^2-4}$. **115.** а) $-\frac{125}{x^3}$; б) $\frac{(y-2)^6}{(y-1)^6}$. **116.** $\frac{a-b}{2ab}$, $-\frac{7}{24}$. **118.** 7 км. **119.** а) $c = \frac{ab}{a+b}$; б) $a = \frac{bc}{b-c}$. **120.** а) $\frac{a+1}{2a}$; б) $-\frac{b}{3}$; в) $\frac{3x}{x+1}$; г) $\frac{2y}{y+5}$; д) $\frac{a^2-ax}{a+x}$; е) $\frac{12b-12y}{b}$. **121.** а) $\frac{a-b}{b}$; б) $\frac{b^2}{bc-c^2}$; в) 1; г) -1; д) 1; е) $-b$. **122.** а) $\frac{y^2+2y+1}{x^2}$; б) 0; в) $\frac{2-2m^2}{m^2}$; г) $q - 2p$. **123.** а) $1 - 2x$; б) $\frac{by-y^2}{2}$; в) $\frac{x^2-2x+12}{x}$; г) $\frac{5x^2-3}{x}$; д) $\frac{2ab}{a^2+b^2}$; е) $\frac{y}{2x+2y}$. **124.** а) -1; б) $\frac{a}{3a+2b}$; в) $\frac{2y+1}{2}$; г) $\frac{1}{x^4-x^2}$. **127.** а) $\frac{y}{y^2-1}$. Указание. Разложите на множители знаменатель каждой дроби в скобках, а затем примените распределительное свойство умножения. б) 1. Указание. Знаменатель $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ представьте в виде $(x - 1)^2(x^2 + 2)$, сократите первую дробь в скобках, а затем воспользуйтесь распределительным свойством умножения. **128.** а) $\frac{1}{a}$; б) $\frac{1}{ab}$; в) $\frac{1}{x-1}$; г) $\frac{1}{x^2+2x+1}$. **130.** 9. **131.** 2. **132.** Указание. а) Из того что $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, следует: $\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2}$, $\frac{a^2}{b^2} + 1 = \frac{b^2}{c^2} + 1$, $\frac{a^2+b^2}{b^2} = \frac{b^2+c^2}{c^2}$, $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2}{b^2}$; б) так как $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, то $\frac{a}{b} + 1 = \frac{b}{c} + 1$, $\frac{a+b}{b} = \frac{b+c}{b}$, $\frac{a+b}{b+c} = \frac{b}{c}$, $\left(\frac{a+b}{b+c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2} = \frac{ac}{c^2} = \frac{a}{c}$. **133.** 10 км/ч.

К дополнительным упражнениям. **134.** а) $\frac{5}{12}$; б) 8; в) 37; г) 79. **135.** а) $2\frac{5}{7}$; б) 13. **136.** а) $n \in \{-32; -6; -4; -2\}$; б) $n \in \{-10; 0; 1; 31\}$; в) $n \in \{-9; 0\}$; г) $n \in \{-1; 29\}$; д) $n \in \{-3; 3\}$; е) $n \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. **137.** д) При $x \neq 0$ и $x \neq 3$; е) при $x < 0$. **140.** д) Из равенства $ad = bc$ при делении его на выражение bd следует пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Прибавим к обеим частям равенства число n и получим $\frac{a}{b} + n = \frac{c}{d} + n$, или $\frac{a+nb}{b} = \frac{c+nd}{d}$. Из этого равенства следует равенство обратных величин, т. е. $\frac{b}{a+nb} = \frac{d}{c+nd}$; е) из равенства $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ следует $\frac{2a}{b} = \frac{2c}{d}$. Прибавим к обеим частям равенства 1, получим $\frac{2a+b}{b} = \frac{2c+d}{d}$. Умножим это равенство на выражение $\frac{b}{2c+d}$, получим $\frac{2a+b}{2c+d} = \frac{b}{d}$. Поскольку $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$, то получаем требуемое: $\frac{2a+b}{2c+d} = \frac{a}{c}$. **141.** а) $\frac{x+2}{x-1}$; б) $\frac{y-2}{y+1}$; в) $\frac{a^2-a+1}{a+2}$; г) $b^2 + b + 1$; д) $\frac{a+3b}{a-3b}$; е) $\frac{b-x}{b^2-6by}$. **142.** а) $\frac{1}{a^4-a^2+1}$; б) 1. **145.** а) $-\frac{7}{8}$; б) $\frac{1}{162}$. **146.** $\frac{1}{11}$. **149.** а) 0,05; б) 0,04. **150.** Рис. 77. **151.** а) $\frac{x^{2n}+3x^n+9}{x^n+7}$; б) $\frac{a^n+5}{a^n+4}$; в) $\frac{a}{2a^n-3b^n}$; г) $a^n - b^n$. **154.** 8. **155.** а) $\frac{6x}{2x+y}$; б) $\frac{x^2+y^2}{xy}$; в) $\frac{4}{2a-1}$; г) $-\frac{18}{3b+y}$. **156.** а) 0; б) 0; в) 1. **158.** $a = b = c = 1$. **160.** а) 0,25; б) 1. **162.** а) $a = 2$ и $a = -2$; б) $a \in \{-3; -1; 1; 3\}$. **166.** а) $\frac{x+1}{x-1}$; б) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$; в) $\frac{x^{3^2}}{(x+y)^2}$; г) $\frac{2a(a+2b)}{a-2b}$. **167.** а) $\frac{3xy}{2}$; б) $3ab$. **168.** а) $x + 1$; б) $y - 2$; в) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; г) $x^2 - y^2$. **170.** а) $-\frac{x^2-3xy}{xz-10z^3}$; б) $\frac{a^2-b^2}{a+3b+1}$; в) $\frac{2x-3}{x-6}$. **172.** а) $\frac{(2a-3b)^2}{(2a+3b)^2}$; б) $\frac{a^6}{b^6}$. **174.** а) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a-b+1}$; б) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x+y+1}$; в) $\frac{2cd}{2c-d}$; г) $\frac{12x^2y}{3y-2x}$. **176.** Указание. а) Пусть $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4} = k$. Тогда $x_1 = kx_2$, $x_2 = kx_3$, $x_3 = kx_4$.

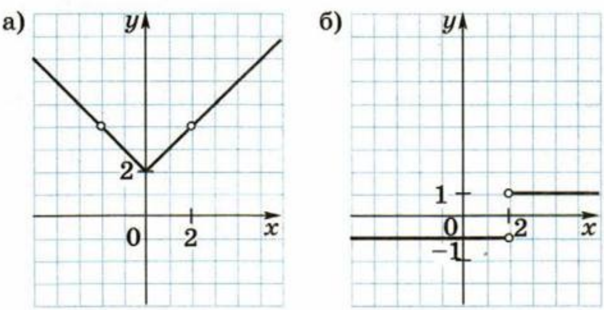


Рис. 77

Сложив почленно эти равенства, получим: $x_1 + x_2 + x_3 = k(x_2 + x_3 + x_4)$. Отсюда $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3 + x_4} = k = \frac{x_1}{x_2}$; б) из доказанного в а) следует, что $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3 + x_4} = \frac{x_1}{x_2}$. $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3 + x_4} = \frac{x_2}{x_3}$, $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3 + x_4} = \frac{x_3}{x_4}$. Перемножив эти равенства, получим $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3 + x_4}\right)^3 = \frac{x_1}{x_4}$. **178.** а) $\frac{4b-12}{5}$; б) $\frac{4a}{3a+6}$; в) $10x$; г) $\frac{4x}{x+2y}$. **179.** а) $\frac{x-z}{y-z}$; б) $\frac{a^3+x^3}{a^3-x^3}$; в) $\frac{x+1}{2x+1}$; г) $\frac{1}{y}$. **180.** а) $a + b$; б) $\frac{a}{b}$. **181.** а) $\frac{1}{z+2}$; б) $\frac{x^2-1}{2x-b}$.

Глава 2

К параграфу 4. **190.** 7 учащихся. **191.** 18 человек. **192.** 47 учащихся. **193.** В офисе работают 11 человек, только английский язык знает 1 человек. **196.** а) $(2n + 1; 3n - 1)$, где n — целое число; б) $(3n + 1; 2n - 1)$, где n — целое число. **197.** 30 способов. **206.** а) $\frac{1}{xy}$; б) $\frac{3}{x^2}$; в) $-\frac{1}{x^2y+xy^2}$. **208.** а) $y = 1$; б) $y = 25$, $y = \frac{25}{9}$. **216.** а) Да; б) нет; в) нет. **217.** а) Да; б) да; в) да. **218.** а) Нет; б) да. **219.** б) $-6, -3, -2, -1, 0, 3$; в) $0, 1$. **220.** а) $1, 2, 4, 5$; б) $-11, 1, 3, 15$. **225.** а) $(1; 17)$, $(17; 1)$, $(-1; -17)$, $(-17; -1)$; б) $(0; 17)$, $(16; 1)$, $(-2; -17)$, $(-18; -1)$; в) $(0; 19)$, $(16; 3)$, $(-2; -15)$, $(-18; 1)$. **226.** а) $(3; 2)$, $(-1; -6)$, $(-7; -6)$, $(-3; 2)$; б) $(-5; 6)$, $(3; -4)$, $(3; 2)$, $(-5; 0)$; в) $(1; -1)$, $(-1; 1)$; г) целочисленных решений нет. **227.** 4 учащихся. **228.** 9.

К параграфу 5. **237.** -1. **238.** а) $\frac{39}{40}$; б) $2\frac{2}{17}$. **260.** а) $(3; 5)$, $(-1; -1)$, $(2; 5)$, $(0; -1)$; б) $(3; -1)$, $(1; 3)$, $(5; 3)$, $(-1; -1)$; в) $(0; 3)$, $(1; 4)$, $(-2; -5)$, $(-3; -6)$; г) $(1; 0)$, $(-1; 0)$. **261.** а) Среднее арифметическое равно $5\frac{4}{7}$, медиана равна 6, среднее арифметическое меньше медианы; б) среднее арифметическое равно 5,25, медиана равна 5, среднее арифметическое больше медианы. **262.** д) -1 и 2; е) -1 и 1; ж) -4 и 6; з) -5 и 5. **268.** 18, 38, 60, 84. **269.** 3. **270.** а) 0 и 1; б) 0, 1 и 4. **272.** 5. **273.** а) 3; б) 0. **274.** 4. **276.** Нет. **277.** 11. **278.** 7. **287.** а) 19; б) 105; в) 3; г) 115. **288.** а) $\frac{6}{7}$; б) $\frac{11}{31}$; в) $\frac{7}{20}$; г) $\frac{5}{7}$. **289.** а) 46 852; б) 105 006. **290.** $\frac{a^3+27}{36}$. **291.** а) $k \neq -1$; б) $k \neq \frac{1}{2}$; в) таких значений k не существует. **292.** а) $x \neq 1$; б) $x \neq \pm 1$; в) все числа; г) $x \neq 0$; $x \neq -1$. **293.** а) Числа a и b имеют одинаковую чётность; б) число a — нечётное. **294.** г) $(2n + 1)^2 - 1 \equiv 0 \pmod 8$. **296.** а) 4; б) 11; в) 4; г) 6. **297.** 1360; 1222. **298.** а) 1; в) 1; г) 4; д) 2. **299.** г) 9. **300.** В 11 часов. **301.** На воскресенье или на понедельник. **302.** а) 4; б) 9; в) 1; **303.** а) 3; б) 1. **304.** а) $n = 7k \pm 1$, где $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $n = 13k + 6$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. **318.** а) $\frac{37}{45}$; б) $\frac{11}{24}$; в) $\frac{7}{8}$; г) $\frac{36}{37}$. **325.** а) $(1; 11)$, $(-1; -11)$, $(11; 1)$, $(-11; -1)$; б), в) $(2; 13)$, $(0; -9)$, $(12; 3)$,

$(-10; 1)$; в) $(2; 13)$, $(0; -9)$, $(12; 13)$, $(-10; 1)$; г) $(2; 15)$, $(0; -11)$, $(14; 3)$, $(-12; 1)$. **326.** 26. **328.** 6 способов. **329.** а) $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 2$; $a = 2$, $b = 2$, $c = -1$, $d = 1$; б) $a = -1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 2$; $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$, $d = 1$. **332.** а) 2, 3, 5; б) 2, 3, 5; в) 2, 3, 5, 13. **334.** а) $1176 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$; б) $1020 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$; в) $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. **335.** а) 6; б) 10; в) 16. **344.** 3. Указание. Воспользуйтесь разбиением множества целых чисел на классы в зависимости от остатков от деления на 3. **345.** 3, 7, 31, 127, 511. **346.** 0, 1. **347** $\frac{6}{x^2-9}$. **348.** 50 и 60 км/ч или 75 и 85 км/ч.

К дополнительным упражнениям. **350.** 4 учащихся. **351.** 2 учащихся. **352.** 17 человек. **356.** -4, 0, 2, 6. **357.** -4, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 8. **365.** а) 0, 1, 3, 4; б) 0, 1, 4. **366.** а) 26; б) 23. **374.** Указание. Воспользуйтесь разбиением множества целых чисел на классы в зависимости от остатков от деления на 6.

Глава 3

К параграфу 6. **376.** а) Да; б) да; в) да; г) нет; д) да; е) нет. **388.** а) $-0{,}8(3)$; б) $12{,}625(0)$; в) $-0{,}384(0)$; г) $1{,}7(14285)$. **389.** а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{223}{99}$; в) $\frac{151}{90}$; г) $\frac{5}{12}$; д) $\frac{577}{110}$; е) $\frac{17\,992}{4995}$. **390.** а) $5{,}3(40)$; б) $5{,}5(39)$. **391.** а) 2,4; б) 1,2. **392.** 2, 0,4, $5\frac{1}{3}$. **394.** а) $4\frac{7}{12}$; б) $3\frac{11}{12}$; в) $a^2 + \frac{1}{a^2} - \frac{a-1}{a+1}$; г) $\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 + \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 + \frac{1}{a}$. **404.** а) Например, 0,2121121112...

414. а) $\frac{3a+b}{(a^2-b^2)(a+b)}$; б) $\frac{a(b-a)}{a+b}$. **415.** $a = 1\frac{1}{3}$, $b = 5$. **428.** $\frac{4}{48}$, $\frac{4}{47}$, $\frac{4}{46}$, ..., $\frac{4}{24}$. **431.** а) Нет; б) да; в) да; г) да. **432.** а) Да; б) да; в) нет; г) да; д) да; е) нет. **442.** а) 1,5; $-\frac{2}{3}$; б) 0; $\frac{5}{6}$; в) $-1{,}2$. **443.** $\frac{x}{6x-4y}$. **444.** 3 ч 40 мин. **446.** а) 0,015; б) 0,004; в) 0,38; г) 1,3. **459.** а) 1; б) $\frac{1}{(x+y)^2}$. **460.** $\alpha^2 - 2\beta$.

К параграфу 7. **462.** а) -2, 2; б) корней нет; в) 0. **464.** ж) $-\frac{1}{50}$; з) $\frac{1}{4}$; и) $-0{,}7$. **465.** в) 0,8; г) 1; д) 1; е) -2. **470.** д) $-0{,}81$; е) 0,024. **471.** а) 0,2; б) 1. **476.** д) $a + \sqrt{3}$; е) $\sqrt{5} - 2b$. **479.** а) 9,25; б) корней нет; в) 4,36; г) корней нет. **480.** а) 1; б) 16; в) 1; г) 16. **481.** а) 0; 4; б) 0; 0,25; в) 2; 3; г) -1; $-0{,}75$. **484.** б) $\frac{3a^3+3a^4}{1-a}$; в) $\frac{1}{14b-7a}$. **499.** $\frac{xy}{2x+y}$. **501.** а) a^4; б) a^5; в) ab^2. **513.** а) 2,97; б) 3,96.

К параграфу 8. **516.** д) $\frac{8}{15}$; е) $3\frac{1}{8}$. **518.** а) 70; б) 64; в) 5,5; г) 153; д) 33,6; е) 25. **519.** г) $\frac{4}{11}$; е) $1\frac{2}{9}$. **527.** а) 108; б) 225; в) 256; г) 189; д) 216; е) 174; ж) 460; з) 405. **533.** в) 40; г) 0,9; д) 25; е) 22. **535.** а) 2; б) -12. **536.** а) 6,3; б) $-19{,}9$. **537.** а) $\frac{2}{3}$; б) 102,4. **541.** а) $(1; -1)$; б) $(1; -1)$. **545.** а) $4\sqrt{5a}$; б) $29x\sqrt{3x}$;

в) $-6{,}2b^2\sqrt{10b}$; г) $5{,}5a^3\sqrt{2a}$. **551.** в) $8+4\sqrt{2}-4\sqrt{6}$; г) $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{30}-\sqrt{18}}{12}$; д) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}-2+\sqrt{2}}{3}$; е) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$. **555.** а) $-3{,}5\sqrt{2a}$; б) $4\sqrt{2x}$; в) $\frac{x^3-4y}{x}$. **556.** а) $\frac{1}{128}$; б) $\frac{2}{169}$; в) 3; г) $\frac{1}{3}$. **559.** а) При $a = 0$; б) при $a = 0$; в) при $a = -4$; г) при $a = -1$. **561.** а) $\frac{a}{b}$; б) $\frac{-(x+2)\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}$; в) $\frac{2x}{\sqrt{x+2}}$; г) $-\frac{x}{\sqrt{y}}$. **562.** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2a}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3a}$. **563.** а) $\frac{b}{c}$; б) $a - b$. **564.** 4. **566.** а) $-\frac{2}{3}$, 1; б) $-1{,}5$, 1. **573.** а) 10; б) 6; в) 16; г) $2\sqrt{17}-6$. **574.** а) $a=\sqrt{76}$; б) $a=\sqrt{20}$. **575.** а) $\sqrt{2}+1$; б) $\sqrt{3}-1$; в) $2\sqrt{3}-1$; г) $2\sqrt{2}+1$. **576.** а) 6; б) 2. **579.** а) $6\sqrt{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$; б) $3\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1}$; в) $3\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; г) $4\sqrt{2\sqrt{6}-\sqrt{15}}$. **580.** а) $\sqrt{5}-2$; б) $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{3}}{3}$; в) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; г) $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{2}$. **581.** а) -6; б) $6a + 1$. **582.** а) $\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}$; б) $\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}$. **584.** а) $\sqrt{2a}$; б) 2. **585.** 3, -1. **586.** а) 4(4); б) 4,5(8); в) 1,1(12); г) 7,(2).

К дополнительным упражнениям. **590.** Указание. Воспользуйтесь методом от противного. **599.** $3\frac{10}{71}$. **604.** а) -1, 0, 1, 2; б) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; в) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; г) 0, 1, 2. **606.** а) 84; б) $4\sqrt{26}$; в) 13,5; г) 21,5. **607.** а) $3\frac{2}{3}$; б) корней нет; в) $\frac{10}{63}$; г) -4; е) корней нет. **610.** а) $\frac{15}{16}$; б) $1\frac{7}{8}$; в) $42\frac{6}{7}$; г) $\frac{4}{15}$. **614.** а) $-2\sqrt{a}$; б) $2\sqrt{ab}$, если $a > 0$, $b > 0$; $4\sqrt{ab}$, если $a < 0$, если $b < 0$. **616.** а) $-2{,}5$; б) 3; в) 32; г) $3\sqrt{2}$. **617.** а) $30-14\sqrt{3}$; б) -1. **621.** а) При $a = 2$; б) при $a = -4$. **622.** а) $\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}$; б) $3\sqrt{6}-5\sqrt{2}-4\sqrt{3}-1$; в) $\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2$; г) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}-\sqrt{14}-\sqrt{21}}{2}$. **623.** а) $\sqrt{b}+1$; б) $\sqrt{a}+1$. **625.** а) $x^2-x\sqrt{2}+1$; б) $\sqrt{1-x^2}-1$. **626.** а) $\sqrt{10}$; б) $-\sqrt{2}$; в) $\sqrt{20}$; г) $-\sqrt{6}$. **627.** а) $4\sqrt{10}+4$; б) $24+2\sqrt{138}$; в) $10+2\sqrt{22}$. **630.** а) 1; б) -2; в) $2\sqrt{7}$; г) $2\sqrt{7}$. **631.** а) $\sqrt{2}$, если $a > 1$; 0, если $a = 0$, $-\sqrt{2a}$, если $0 < a < 1$; б) 2, если $a > 4$; $\sqrt{a}$, если $0<a<4$. **632.** $-\sqrt{ab}$. **634.** а) $a^2 + 1$; б) $a^2 + 2$; в) $\sqrt{a+2}$; г) $\sqrt{a+2}$; д) 1.

Глава 4

К параграфу 9. **640.** а) 0, 0,6; б) 0, 0,6; в) 0, 0,7; г) 0, 3; д) 0, $-\frac{1}{7}$; е) 0, $\frac{2}{3}$. **642.** а) 0, $\frac{3}{4}$; б) $-\frac{\sqrt{7}}{5}$, $\frac{\sqrt{7}}{5}$; в) 0; $-\frac{1}{9}$; г) $-2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$; д) 0; е) 0. **644.** Нет.

$x = 0$. **645.** а) $a-1$, $1-a$; б) $2m+1$, $-2m-1$. **646.** а) $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$; б) 0, $\frac{2}{3}$; в) 0, $\frac{3}{11}$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) -2, 2; е) 0, $-\frac{8}{9}$; ж) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$; з) 0. **647.** а) -1, 1; б) 0, $-\frac{3}{4}$; в) $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$; г) -5, 5; д) $-1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$; е) 0, $-\frac{1}{2}$. **648.** а) -5, 5; б) -2, 2; в) -1, 1; г) $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$. **649.** а) 0; 0,25; б) 1; 3,25; в) 0; г) 1,5. **650.** а) $x = 0$ или $x = \frac{1}{2}y$; б) $x = 0$ или $x = 2y^2$; в) $x = \pm y\sqrt{1{,}5}$; г) $x = \pm\sqrt{-y-y^2}$ при $y^2 + y \leqslant 0$. **652.** 5 и 8. **653.** 4 и 12 см. **654.** $1\frac{1}{3}$ см. **656.** а) 3,5 и 3,6; б) $-0{,}3$ и 0,6. **657.** а) Нет. б) нет. **659.** а) 3, $-\frac{1}{2}$; б) -4, $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$; г) $1\frac{2}{3}$; д) -2; е) корней нет; ж) $\frac{1}{4}$, -2; з) 10, -9. **660.** а) $-\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}$; б) $1\pm\sqrt{3}$; в) $\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$; г) $-\frac{2}{3}$, 3; д) $\frac{11\pm\sqrt{41}}{4}$; е) $1\pm2\sqrt{2}$; ж) $-\frac{2}{3}$, -3; з) 5, $-\frac{3}{4}$. **661.** а) 2, $\frac{1}{6}$; б) $-4\frac{1}{2}$; в) корней нет; г) $-2\pm\sqrt{5}$; д) $\frac{1\pm\sqrt{97}}{16}$; е) $\frac{10\pm2\sqrt{10}}{3}$. **662.** а) $-0{,}3$, 1,1; б) $\frac{1}{6}$, 4. **666.** а) -1, $-1{,}8$; б) $\frac{13\pm\sqrt{37}}{22}$; в) $\frac{3\pm\sqrt{15}}{6}$; г) 0,8, 0,5. **667.** а) 1, 0,8; б) 2, 1; в) $\frac{-2\pm2\sqrt{6}}{5}$; г) $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$; д) $\frac{-6\pm\sqrt{6}}{3}$; е) 4, $\frac{1}{4}$; ж) -2, $-2\frac{2}{3}$; з) 3, $-\frac{3}{5}$. **668.** а) 1, -7; б) $\frac{4\pm\sqrt{7}}{9}$; в) $\frac{2\pm\sqrt{14}}{5}$; г) 4, -2. **669.** а) $\frac{7\pm\sqrt{23}}{13}$; б) -3, 1; в) 1, $\frac{1}{13}$; г) 6, $-4\frac{4}{15}$; д) $7\frac{1}{3}$, -2; е) $\frac{-3\pm\sqrt{37}}{14}$; ж) 1, $-\frac{1}{8}$; з) $\frac{1}{2}$. **671.** а) $4\frac{1}{8}$, -3; б) 30, -19; в) 10, $7\frac{7}{9}$; г) 6, -4; д) 2, $-\frac{2}{3}$; е) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. **672.** $q < 1$. **674.** 2. **675.** а) 0,55; $-1{,}22$; в) 5, 17; $-0{,}84$. **676.** а) -3, $3\frac{3}{8}$; б) 1, $-\frac{31}{35}$. **677.** а) $3b$, $2b$; б) $-b$, $-1{,}5b$; в) $-2b$, $3b$; г) $-b$, $\frac{2b}{3}$. **678.** $x = a$, $x = 4 - a$ при любом значении a. **680.** $x = 0{,}5$ при $m = 0$, $n = 1$; $x = 1$ при $m = 3$, $n = 2$. **683.** а) -6; б) 126; в) $3-2a\sqrt{6}$; г) 42. **684.** а) $\frac{1}{30}$; б) $-\frac{3}{4}$. **686.** а) ±1; б) ±1, ±4; в) $\pm\sqrt{5}$, $\pm\sqrt{3{,}5}$; г) $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\sqrt{3}$; д) $\pm0{,}25$; е) нет корней. **687.** а) ±2, ±3; б) ±3, $\pm\sqrt{3}$; в) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) ±1, $\pm\frac{1}{2}$; д) ±2; е) ±3. **688.** а) (0; 9), (1; 0), (-1; 0), (3; 0), (-3; 0); б) (0; 4), (0,5; 0), ($-0{,}5$; 0), (2; 0), (-2; 0); в) (0; 0), (3; 0), (-3; 0); г) (0; 0). **689.** а) ±4; б) ±1, $\pm\frac{1}{2}$; в) нет корней; г) 1, -3; д) -1, 0,75; е) 2, $-0{,}4$. **690.** а) ±3; б) ±2, $\pm\sqrt{6}$; в) ±2; г) 0, $\pm\sqrt{3}$. **691.** а) ±2; ±4; б) 0; 2. **692.** а) 2; -4; б) 5; -4; в) 2; -3; г) $1\pm\sqrt{2}$; 3; -1. **693.** а) -7; 4; б) -3; 4. **694.** а) -8; 3; б) -1; 7; в) -16; 2; г) -1; 8. **695.** а) -7; 3; б) -2; 4; в) -8; 2; г) -5; 3. **696.** Наименьшее значение равно 42, наибольшее значение равно 107. **697.** $a = 3$, $b = 1{,}5$. **698.** 16,9. **699.** 9 и 14 см. **700.** 42 см. **701.** 60 см^2. **702.** 24. **703.** 6 и 8 м. **705.** 16. **706.** 11 и 13. **707.** 6 и 9. **708.** 7. **710.** 32. **711.** 44. **712.** 10. **713.** 8 и 7 л. **714.** 20 и 10 л. **717.** а) 1; б) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

К параграфу 10. **722.** $y = -3\frac{1}{5}$, $z = -3\frac{2}{5}$. **723.** $D > 0$, p и q — противоположные числа. **724.** $D > 0$, второй коэффициент равен свободному члену. **728.** $x_2 = \frac{1}{3}$, $q = -2$. **733.** -96. **734.** 1. **735.** -35. **737.** а) 3; 2; б) -2; 3; в) -3; -2; г) -3; 2. **738.** а) 3; a; б) -3; $-a$; в) 3; $-a$; г) -3; a. **746.** а) $x^2 = 7x + 12 = 0$; б) $x^2 + x - 12 = 0$; в) $x^2 - x - 12 = 0$; г) $x^2 + 7x + 12 = 0$. **747.** а) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$; б) $x^2 + ax - 2a^2 = 0$; в) $x^2 - ax - 2a^2 = 0$; г) $x^2 + 3ax + 2a^2 = 0$. **748.** а) $x^2 - 3 = 0$; б) $x^2 + 2x - 2 = 0$; в) $x^2 - 5 = 0$; г) $x^2 - 4x - 1 = 0$. **749.** 6 см. **750.** 48 см^2. **752.** $a = -2$. **754.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет; д) да; е) да. **755.** а) $(u + v)((u + v)^2 - 3uv)$; б) $(u + v)^2 - 5uv$; в) $((u + v)(u + v)^2 - 3uv) - 4uv$; г) $\frac{(u+v)^2 - 2uv}{(uv)^2}$; д) $(u + v)((u + v)^2 - 4uv)$; е) $(u + v)^2((u + v)^2 - 3uv)$. **756.** $\frac{q^2 - p}{2}$. **757.** $\frac{n^2}{3} - \frac{m}{3n}$. **758.** а) 84; б) 164; в) 248; г) 26 896. **759.** а) 0,5; б) $\frac{337}{1296}$. **763.** -2176. **768.** $n = 6$. **769.** а) 2; б) $1 + \sqrt{2}$. **770.** а) $(9 - 2x)(x + 2)$; б) $(5y - 3)(3y + 2)$; в) $(3 - 4m)(3m + 1)$; г) $3(x - 0{,}7)(x + 1)$; д) $5(k - 0{,}8)^2$; е) $3(p - 0{,}3)(p + 0{,}3)$. **772.** а) $3x(x - 2)(x - 1)$; б) $y(y - 4)(y + 8)$; в) $(x - a) \times (x - 6)(x - 3)$; г) $(2y + m)(y + 5)(y - 2)$. **773.** а) $2x(2x - 5)(3x + 2)$; б) $4m(4y + 1)(5y - 2)$; в) $5x(3x - 4)(2x + 3)$; г) $4k(5m + 2)(m - 5)$. **774.** а) $(2x - y)(x - 2y)$; б) $(x - 2y)(2x + y)$; в) $(x + 2y)(2x - 3y)$; г) $(x - 2y) \times (2x - 3y)$. **775.** а) $\frac{2y + 5}{4}$; б) $\frac{2x + 3}{3x + 2}$; в) $\frac{k - 7}{4k - 3}$; г) $\frac{6p - 5}{3p + 4}$. **776.** а) $\frac{m(3x - 2)}{2(6x + 1)}$; б) $\frac{3y - 1}{4y - 3}$. **777.** а) $x^2 + 6x + 8$; г) $\frac{x - 6}{(x - 3)(x - 12)}$. **780.** а) 49; б) 51; в) 104; г) 21. **781.** б) 2; $-0{,}5$. **782.** а) $(y - 3)(4a - 5y)$; б) $(m + n)(m - n)(3m + 2n)$. **783.** 11 и 14 см.

К параграфу 11. **784.** а) $-3\frac{1}{2}$; б) -1; в) -1; г) $\frac{1}{3}$; д) 2,4, -2; е) $3\frac{1}{2}$, -2. **785.** а) 5, 4; б) $\pm\sqrt{2}$; в) 4; г) корней нет; д) -3, $-5\frac{1}{3}$; е) 2, $\frac{1}{3}$. **786.** а) $1\frac{1}{2}$, -1; б) -3; в) 3; г) $-1\frac{1}{2}$, -5; д) 1, $1\frac{3}{7}$; е) $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{21}$. **787.** а) 2, $\frac{1}{2}$; б) 5, $1\frac{2}{3}$; в) $-1\frac{1}{14}$, -2; г) 1, $\frac{1}{15}$. **789.** а) $\left(1\frac{1}{2}; 0\right)$, (1; 1); б) (12; 42), ($-1$; 3). **790.** а) 4, $-4\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}$, -6;

в) 6, -1; г) 2, $1\frac{1}{4}$. **791.** а) 2, -1; б) 6, -3; в) корней нет; г) корней нет. **792.** а) $4\frac{1}{3}$; б) $3\frac{1}{2}$, 1. **793.** а) $5 \pm 4\sqrt{3}$; б) -4, -5. **794.** а) 6, -1, 3, -2; б) $\frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$. **797.** а) $4m$, m; б) $\frac{13 \pm \sqrt{169-25m}}{m}$ при $m \leqslant 6\frac{19}{25}$. **798.** а) $\sqrt{2}-2$; б) 41. **800.** 6 и 12. **801.** $\frac{12}{18}$. **802.** $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{6}$. **803.** 50 км/ч. **804.** $1\frac{1}{2}$ ч. **805.** 20 км/ч. **806.** 2 или 2,5 ч. **807.** 10 и 15 ц/га. **808.** 15 км/ч. **809.** 16 км/ч. **810.** 4 км/ч. **811.** 10 и 15 дней. **812.** 30 и 20 ч. **813.** 12 дней и 4 дня. **819.** 60 км/ч. **820.** 100 км/ч. **821.** 2 и 14 км/ч.

К дополнительным упражнениям. **826.** а) $\pm 1\frac{1}{2}$; б) корней нет; в) ± 10. **827.** а) 0; 1,5; б) 0; $\frac{1}{12}$; в) 0; 1,5; г) 0; -5. **828.** а) 0; 8; б) ± 6; в) ± 3; г) 0; ± 2. **829.** а) ± 1; б) 0, -2; в) $\pm\frac{3}{4}$; г) ± 8. **830.** а) $\pm\sqrt{a}$ при $a \geqslant 0$; б) $\pm\sqrt{-a}$ при $a \leqslant 0$; в) $\pm a$; г) 0 при $a = 0$; д) 0, $\frac{3a}{2}$; е) $\pm 3\sqrt{a}$ при $a \geqslant 0$. **832.** а) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{4}$, $-1\frac{1}{2}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $-0{,}5$, $-0{,}3$; д) $1 \pm \sqrt{3}$; е) $\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}$; ж) $-3 \pm \sqrt{5}$; з) $-1 \pm 2\sqrt{3}$. **833.** а) -3, $5\frac{1}{2}$; б) -2, $6\frac{1}{2}$; в) 8, 4; г) -1, $9\frac{1}{2}$; д) 2, $\frac{2}{5}$; е) $\frac{1}{13}$, -1. **835.** а) 4, -3; б) 0, 1; в) 3, $\frac{2}{5}$; г) -1, -3. **836.** а) 3; 7; б) 24; -12; в) 3; -13; г) 2; д) $5 \pm \sqrt{21}$; е) нет корней; ж) $18 \pm 6\sqrt{5}$; з) 6. **837.** $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$. **838.** а) 1; -7; $-3 \pm \sqrt{6}$; б) нет корней; в) 6; -1; г) -1; 5; $2 \pm 2\sqrt{2}$. **839.** а) 1; 2; -2; -3; б) 0,6; $-\frac{3}{7}$; 0,75; $-0{,}25$. **840.** -1; 4. **843.** 8 и 9, -9 и -8. **844.** 6, 8 и 10. **845.** 10, 11 и 12 см. **846.** 2 см. **847.** 23 см. **848.** 12. **849.** 6. **850.** а) $-1{,}5$; б) 1. **851.** а) -14; б) -8; в) $\frac{2}{5}$; г) 0. **852.** а) $b = 6$, $c = 0$; б) $b = 4$, $c = 16$. **857.** а) $\frac{m+3}{2m-3}$; б) $\frac{c-2}{c-1}$; в) $\frac{x-5}{y(x^2-x+1)}$. **858.** а) $\frac{x+4}{x+2}$; б) $-\frac{3}{m+1}$. **859.** а) ± 3, $\pm\frac{1}{2}$; б) ± 2, $\pm\frac{1}{3}$. **861.** а) При $m > 2$; б) при $-6 < m < 6$. **862.** а) 15, 3; б) 2, -1; в) 6, -8; г) 5, 3. **863.** а) 3, $-\frac{22}{23}$; б) -2, $\frac{33}{35}$; в) 1, $\frac{1}{4}$; г) $\frac{4}{11}$, -1; д) 0, 3; е) $1\frac{1}{2}$, -2; ж) 1, $-4\frac{1}{2}$; з) $\frac{1}{3}$; $-\frac{2}{9}$. **865.** $6\frac{2}{3}$; $3\frac{1}{3}$. **866.** $\frac{3}{8}$. **867.** $\frac{4}{6}$ и $\frac{12}{6}$. **868.** $\frac{2}{6}$ и $\frac{5}{12}$. **869.** 50 км/ч. **870.** 40 ч. **871.** 50 км/ч. **872.** 2, 2,2 и 2,5 ч. **873.** 250 км. **874.** 50 км/ч. **875.** 60 км/ч. **876.** 3 км/ч. **877.** 4,5 км/ч. **878.** 3 км/ч. **879.** 4 км/ч. **880.** 23 км/ч. **881.** 3 и 3,5 м. **882.** 1,8 и 2,4 м. **883.** 30 и 20 ч. **884.** 60 и 40 ч. **885.** 10 и 15 дней. **886.** 60 и 90 дней. **887.** 6 и 12 ч. **888.** 20 ч. **889.** 8 суток. **890.** На 0,5 мин.

Глава 5

К параграфу 12. **897.** Ближе к станции. **898.** В первый бак. **899.** Первый вкладчик. **904.** а) -3; 2; б) -4; 7; в) -11; 5; г) -2; 4. **905.** а) 3; б) $\frac{1}{27}$. **907.** в) $b + 5 > a - 8$; г) сравнить невозможно. **920.** $-4\frac{1169}{1369}$. **923.** а) $-1 \pm \sqrt{2}$; б) $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$; в) 1; $-\frac{1}{3}$; г) $\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}$. **932.** $0{,}6 < c < 4{,}1$. **944.** а) $2{,}8 < 2\sqrt{2} < 3$; б) $2{,}4 < 1 + \sqrt{2} < 2{,}5$; в) $0{,}4 < \sqrt{2} - 1 < 0{,}5$; г) $9{,}2 < 5 + 3\sqrt{2} < 9{,}5$. **945.** $q \in \{5; 8; 9\}$. **946.** $q \in \{7; 12; 15; 16\}$. **947.** а) 2,5; б) 7. **974.** Вторая группа. **975.** а) $(-\infty; 4)$; б) $(7{,}7; +\infty)$; в) $(3; 6{,}5)$; г) $\varnothing$. **976.** 17. **978.** а) $-0{,}1$; б) $-1{,}25$.

К параграфу 13. **980.** г) $\left[-\frac{5}{7}; +\infty\right)$; д) $(2{,}1; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$; ж) $\varnothing$; з) $[\sqrt{3} + 1; +\infty)$; и) $(-1; +\infty)$. **981.** д) $(2{,}5; +\infty)$; е) $(-50; +\infty)$; ж) $[-10; +\infty)$; з) $[0{,}6; +\infty)$. **982.** в) $x > 20$; г) $x < 8\frac{4}{7}$. **985.** а) $p \geqslant 0$; б) $p \leqslant 1$; в) $p \leqslant 2\frac{2}{3}$; г) $p \geqslant \frac{7}{30}$. **986.** а) $\left(\frac{1}{7}; +\infty\right)$; б) $(5{,}5; +\infty)$; в) $\left(-\infty; 4\frac{1}{6}\right)$; г) $(-\infty; 10{,}5)$; д) $(-1{,}52; +\infty)$; е) $\varnothing$. **987.** а) $(-\infty; -1)$; б) $\left(-\infty; \frac{10}{17}\right)$; в) $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right)$; г) $(-\infty; 9)$. **988.** а) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$; б) $[1; +\infty)$; в) $(-0{,}26; +\infty)$; г) $(-\infty; 4\}$. **989.** а) -4; б) -3. **990.** а) 14; б) -120. **991.** а) $b \neq 0$; б) $b < 0$; в) $b > 3$; г) $b < 1{,}5$. **992.** а) $-4{,}8$; б) $23\frac{1}{3}$. **993.** а) $x < \frac{3}{2m}$; б) $x > -\frac{7}{4m}$. **995.** а) $m = 3$. **996.** а) $(-\infty; 0{,}8)$; б) $(20; +\infty)$; в) $(-\infty; 142)$; г) $(-\infty; 375)$; д) $(-\infty; 30]$; е) $\left[3\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **997.** а) $x < \frac{2}{15}$; б) $x < -\frac{3}{14}$. **998.** а) $(80; +\infty)$; б) $(-\infty; 1)$; в) $(-6; +\infty)$; г) $(-\infty; -8]$; д) $(-\infty; -5{,}75)$; е) $(-\infty; 10]$. **999.** а) $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$; б) $[-0{,}6; +\infty)$; в) $(-4; +\infty)$; г) $\left(-\infty; -4\frac{1}{3}\right]$. **1000.** а) При $a > -203$; б) при $a > 110$. **1001.** а) $(-0{,}4; +\infty)$; б) $(3{,}6; +\infty)$; в) $[20; +\infty)$; г) $(-\infty; 0{,}3)$; д) $\left[1\frac{1}{7}; +\infty\right)$; е) $\left(1\frac{17}{18}; +\infty\right)$. **1002.** а) $\left(-\infty; 1\frac{8}{9}\right)$; б) $\left(-1\frac{1}{9}; +\infty\right)$; в) $\left(11\frac{1}{3}; +\infty\right)$; г) $\left(4\frac{8}{13}; +\infty\right)$. 15). **1003.** а) -1; б) -2; -1. **1004.** а) 8; б) 6. **1005.** а) Бесконечно много; б) 1; в) 0. **1006.** а) При $x \in \left[1\frac{2}{3}; +\infty\right)$; б) при $x \in (-\infty; 2{,}5]$; в) при любых x; г) ни при каких. **1007.** а) $(1{,}6; 2{,}5) \cup (2{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; 1{,}5)$; в) $(0{,}5; 2{,}5) \cup (2{,}5; +\infty)$; г) $[2; 3) \cup (3; +\infty)$. **1008.** а) $p > \frac{1}{3}$; б) $p < \frac{1}{3}$; в) $p \leqslant \frac{1}{3}$. **1009.** При $a < 1{,}2$.

1010. При $b \neq -1$, $b < 0$. **1011.** а) $\frac{28-4m}{3}$, $m > 7$; б) $-\frac{32m+160}{17}$, $m > -5$. **1012.** До 5 мин. **1013.** Больше 18 км/ч. **1014.** $n = 8$. **1015.** $n = 12$. **1016.** 64 плитки. **1017.** а) Нет такого значения; б) $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{6}\right)$; в) $c > \frac{1}{6}$. **1020.** 1. **1021.** $x + 6$ — частное, 22 — остаток. **1023.** а) $\left(3\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) $(-\infty; -1{,}5)$; в) $\left(0; \frac{1}{6}\right]$; г) $\varnothing$; д) $(6; +\infty)$; е) $\varnothing$. **1024.** а) $(0; 0{,}5)$; б) $\varnothing$; в) $(-\infty; 0)$; г) $\left[-7; \frac{1}{6}\right)$. **1025.** Таких значений нет. **1026.** а) $[1{,}4; 1{,}6]$; б) $[2{,}5; +\infty)$; в) $\left[\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty)$; г) $[2; 4) \cup (4; 5]$; д) $\left[\frac{1}{30}; \frac{1}{18}\right) \cup \left(\frac{1}{18}; \frac{1}{15}\right]$; е) $(0; +\infty)$. **1027.** а) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; б) $(6{,}5; +\infty)$; в) $(-\infty; 0)$; г) $(14{,}6; +\infty)$; д) $(30; +\infty)$; е) $\varnothing$; ж) $\left(2\frac{1}{7}; 3\right)$; з) $(8; 11)$. **1028.** а) $(5; 27)$; б) $(3; +\infty)$; в) $\left(3; 4\frac{1}{6}\right)$; г) $\left(4\frac{2}{7}; +\infty\right)$; д) $(-\infty; 0{,}7)$; е) $(11; +\infty)$. **1029.** а) $-3, -2, -1, 0, 1$; б) $0, 1, 2, 3$; в) $-2, -1, 0, 1, 2$; г) $4, 5, 6, 7$ ... . **1030.** а) 6, 7, 8; б) 0, 1, 2, 3; в) 0, 1, 2, 3; г) 2. **1032.** а) При $a \geqslant 15$; б) при $a \geqslant 9$; в) при $a < 5{,}6$; г) при $a \geqslant 77$. **1033.** а) При $b \geqslant 5{,}6$; б) при $b \leqslant -44$. **1034.** а) $(-\infty; 6)$; б) $(-\infty; -4)$; в) $\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$; г) $\left(\frac{1}{3}; 1\frac{5}{7}\right)$. **1035.** а) $\varnothing$; б) $(56; +\infty)$; в) $\left[16\frac{2}{3}; +\infty\right)$; г) $\left[1\frac{5}{7}; +\infty\right)$. **1036.** а) 2; б) -2; в) не существует; г) 19. **1037.** а) 2; б) 11; в) 4; г) 3. **1038.** При $a < -0{,}5$. **1039.** $-\frac{15}{35} < b < -\frac{14}{35}$. **1040.** а) При $a < -11$; б) таких значений a не существует. **1041.** а) $(2; 3)$; б) $(-1; 2)$; в) $[3; 6]$; г) $[-3{,}2; -2]$. **1042.** а) $(0{,}3; 1{,}8)$; б) $(12; 20)$; в) $[-2; -1]$; г) $\left[2; 2\frac{3}{4}\right]$. **1043.** а) 2; б) 1, 2, 3, 4; в) 1; г) 0. **1044.** а) При $-4 \leqslant b \leqslant 2$; б) при $-11{,}5 < y < 3{,}5$. **1045.** а) 4, 5, 6; б) 4, 5, 6, 7, 8, 9; в) 9, 10, 11, 12; г) -1, 0, 1. **1047.** а) $(-0{,}3; 0{,}2)$; б) $(-1; 0)$; в) $\varnothing$. **1048.** а) $\varnothing$; б) $(1; 1{,}1)$; в) $(-\infty; -2)$; г) $(4; +\infty)$. **1049.** а) $a \leqslant -3\frac{2}{3}$; б) $a \leqslant 4$; в) $a \geqslant -3\frac{1}{3}$; г) $a \geqslant -0{,}5$. **1050.** 20. **1051.** 57 + 18. **1052.** Больше 18 см, но меньше 22 см. **1053.** Больше 29 см, но меньше 36 см. **1054.** Больше 38 км/ч, но меньше 54 км/ч. **1057.** 0, 1, 4, 7. **1058.** а) Не является; б) не является; в) является; г) является. **1059.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(-\infty; 3)$; в) $(-\infty; 2] \cup (5; +\infty)$; г) $[-2; +\infty)$. **1060.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(-\infty; 2]$; в) $[-1; +\infty)$; г) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. **1061.** а) $(-\infty; 0{,}75) \cup [3; +\infty)$; б) $(-0{,}25; +\infty)$; в) $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; г) $(-\infty; +\infty)$. **1062.** а) $(1; 2) \cup (6; 8)$; б) $[2; 4)$; в) $(1; 6)$. **1063.** а) $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$; б) $(-\infty; -10) \cup (2; +\infty)$; в) $(3; 4)$; г) $(-\infty; -1) \cup$

$\cup (7; +\infty)$. **1064.** а) $\left[-1{,}5; \frac{2}{3}\right]$; б) $(-\infty; 0{,}4] \cup [1{,}5; +\infty)$; в) $[-4; 0{,}5)$; г) $\left[\frac{2}{7}; 3{,}5\right)$. **1065.** г) 5; 6; 7; ... . **1066.** а) $(-\infty; 2] \cup [5; +\infty)$; б) $[-3; 5]$; в) $(-2; 5)$; г) $(-\infty; +\infty)$. **1067.** а) $(-\infty; -3) \cup (-2; 0) \cup (1; +\infty)$; б) $(-3; -2) \cup (-1; 0)$. **1068.** а) При $a = 0$ нет решений, при $a < 0$ решением является промежуток $(0; -a)$, при $a > 0$ — промежуток $(-a; 0)$; б) при $a = 0$ решением являются все числа, при $a > 0$ — объединение открытых лучей $(-\infty; 0)$ и $(a; +\infty)$, при $a < 0$ — объединение лучей $(-\infty; a)$ и $(0; +\infty)$. **1069.** б) $(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$; в) $[-1; 2)$; г) $(-\infty; -2) \cup [-1; +\infty)$. **1070.** а) $(-2; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$. **1071.** При $a \geqslant -1$. **1073.** а) $(3; 11)$; б) $(-\infty; -11) \cup \cup (1; +\infty)$; в) $[-22; 24]$; г) $(-\infty; 31] \cup [33; +\infty)$; д) нет решений; е) x — любое число. **1074.** а) $(-\infty; 0{,}5)$; б) $(0{,}5; +\infty)$. **1075.** а) При $a \leqslant -3$; б) при $a \geqslant 0{,}3$. **1076.** а) $\left(-\infty; -\frac{7}{15}\right] \cup [1{,}8; +\infty)$; б) $\left(-\infty; -1\frac{1}{3}\right) \cup (1{,}5; +\infty)$; в) $\left(4\frac{2}{3}; 10\right)$; г) $\left[2; 2\frac{4}{7}\right]$. **1077.** а) $\left(1; 2\frac{1}{3}\right) \cup \left(3; 4\frac{1}{3}\right)$; б) $(-1; 1) \cup (1{,}8; 3{,}8)$; в) $[3; 5] \cup [6; 8]$; г) $[4; 6] \cup [9; 11]$. **1078.** При $a \leqslant -3$. **1079.** а) $[1; 2]$; б) $(0; 4)$; в) $(1{,}5; 2)$; г) нет решений. **1080.** а) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; б) $(-1; 3)$; в) $(1-\sqrt{7}; 1+\sqrt{7})$; г) $(-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup \cup (1; +\infty)$. **1081.** а) 0; ±1; ±2; б) ±2; ±3; в) -4; -3; -2; -1; 0; г) -1; 0; 1; 2. **1082.** а) $(-2; 2)$; б) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$. **1083.** 50 км/ч. **1084.** $\frac{a}{b}$. **1085.** 0; 1; $-\frac{1}{7}$.

К дополнительным упражнениям.

1096. Во второй день. **1097.** Пешеход, который шёл с постоянной скоростью. **1103.** а) $\left(-\infty; 1\frac{10}{11}\right)$; б) $(-6; +\infty)$; в) $\left(\frac{2}{13}; +\infty\right)$; г) $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$; д) $\left(-\infty; 1\frac{1}{4}\right)$; е) $(1{,}4; +\infty)$. **1104.** а) -2; б) 0; в) 8; г) 9. **1105.** а) 8; б) -1; в) 7; г) 6. **1106.** а) При $a < 13\frac{1}{3}$; б) при $a > 13\frac{1}{3}$. **1107.** а) $[1{,}3; 1{,}5]$; б) $[-15; 0]$. **1108.** а) $(0; 5)$; б) $(0; 4)$. **1109.** а) $(-1; 0)$; б) $\left(-\frac{4}{13}; 0\right)$. **1110.** а) $[4; 16]$; б) $[-20; 60]$. **1111.** а) $[-2; 6]$; в) $[0; 10]$. **1112.** $(2{,}5; 4)$. **1113.** $[-2; -0{,}5)$. **1114.** а) $(-1{,}5; -0{,}5)$; б) $(-2; 0{,}5)$. **1115.** а) $(2; 6)$; б) $(0{,}1; 0{,}5)$. **1116.** а) $(-4; -3) \cup (3; 4)$; б) $(-2; -1) \cup (3; 4)$; в) $[-1; 0] \cup [1; 2]$; г) $[-1; 0] \cup \cup \left[1\frac{1}{3}; 2\frac{1}{3}\right]$. **1117.** -2, -1, 2, 3. **1118.** а) При $a \leqslant 11$; б) при $a \leqslant -10$. **1120.** При $a > 3$. **1121.** Таких значений a не существует. **1122.** а) При $a \geqslant -2{,}8$; б) при $a \leqslant -4{,}5$. **1127.** а) $[1; 2]$; б) $\left(0; 2\frac{2}{3}\right]$; в) $[-3; 7]$; г) $[-0{,}2; 1) \cup (1; 3]$. **1128.** 31, 32, 33, 34, 35. **1129.** Больше 4,5 км/ч, но меньше 6 км/ч. **1130.** а) $(0; 4)$; б) $(-\infty; 1] \cup \cup [3; +\infty)$; в) $(-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$; г) $[-4; 1) \cup (1; 6]$. **1131.** -2; 3.

Глава 6

К параграфу 14. **1137.** 0,0016, 0,008, 0,04, 0,2, 0,5, 1,25, 3,125, 7,8125. **1138.** в) $\frac{1}{64}$; г) $-\frac{1}{32}$; д) 81; е) 15,625; и) $\frac{4}{9}$; к) $\frac{8}{125}$. **1139.** в) $-\frac{1}{25}$; г) $\frac{1}{32}$; д) $\frac{5}{6}$; е) $\frac{5}{36}$; ж) $\frac{4}{27}$; з) $\frac{9}{400}$. **1140.** а) 0,4; б) $\frac{1}{9}$; в) $-3\frac{22}{81}$; г) 15,05. **1141.** г) $\frac{x^3}{9y^4}$; д) $\frac{a}{b+c}$; е) $\frac{y}{(x+a)^2}$; ж) $\frac{1}{a^2b^2c^2}$; з) $\frac{x+y}{x-y}$. **1145.** а) $\frac{a+b}{ab}$; б) $\frac{y^2-x^2}{x^2y^2}$; в) $\frac{a^2+b^2}{ab}$; г) $\frac{c^3d^3-9}{c^2d^2}$; д) $\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}$; е) $\frac{a^6-b^6}{a^4b^4}$. **1146.** 14. **1148.** 4 и 10 см. **1151.** а) 2,25; б) $\frac{1}{108}$; в) $\frac{4}{81}$; г) $-2{,}25$; д) 36; е) $\frac{4}{7}$. **1154.** а) 2^2; б) 2^{-9}; в) 2^2; г) 2^{-24}; д) 2^{-45}. **1155.** а) 3^{-4}; б) 3^{14}; в) 3^{-17}; г) 3^0. **1156.** а) 9^{18}; б) 27^{12}; в) 81^9; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-36}$; д) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-18}$; е) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-12}$. **1157.** а) $m = 1$; б) $m = 3$; в) $m = -4$; г) $m = 4$; д) $m = 1$; е) $m = 3$. **1158.** а) 3; б) 1; в) 16; г) 0,2; д) 92,16; е) $\frac{25}{49}$. **1160.** а) $20ab$; б) 0,4; в) $m^{10}n^{-7}$; г) $\frac{6}{17}a^{3n+1}b^{n+2}$; д) $3x^{n+4}y^7$; е) $5c^{n+2}$. **1161.** г) $81a^{24}b^{-32}$; д) $-8c^9b^{12}$; е) $5\frac{1}{16}c^{-20}d^8$; ж) $x^{4n}b^{-16}$; з) $y^{10n}a^{12n}$; и) $c^{2n}d^{-3n}$. **1162.** а) $(4a^{-1})^3$; б) $(0{,}01b^3)^2$; в) $\left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)^7$; г) $(0{,}1x^3y^{-4})^6$; д) $(1{,}5c^{2n}d^{-n})^5$; е) $(2{,}3a^{-3n}b^{4n})^3$. **1163.** а) $\frac{a^{16}}{b^{13}}$; б) $\frac{1}{a^9}$; в) $\frac{80x^2}{y^6}$; г) $\frac{1}{36x^4}$. **1164.** $-3a$. **1166.** а) 3; б) 3.

К параграфу 15. **1167.** а) $\frac{a^2+b^2}{ab}$; б) $\frac{1+a^3b^3}{ab}$; в) $\frac{b+a}{a^2b}$; г) $\frac{b^2-a^2}{a^2}$; д) $\frac{1}{ab}$; е) $\frac{a^2b^2-1}{ab}$. **1169.** а) Нет; б) да. **1171.** а) x; б) x^2; в) $-\frac{1}{y}$; г) $\frac{1}{y^6}$; д) ab; е) $\frac{1}{a^4b^4}$. **1173.** Указание. Возведите обе части равенства $a + a^{-1} = b$ в куб: $a^3 + a^{-3} + 3(a + a^{-1}) = b^3$. Отсюда $a^3 + a^{-3} = b^3 - 3b$. **1174.** а) $\frac{1}{(a^2-b^2)^2}$; б) $\frac{y}{x}$; в) $\frac{a+b-1}{a+b+1}$; г) $\frac{(a-b)^2}{a-b-1}$; д) $\frac{a}{a+b}$; е) $\frac{n^2+1}{n^2-1}$. **1179.** а) $a = \frac{bc}{b+c}$; б) $b = \frac{ac}{c-a}$. **1182.** а) $n = 2$; б) $n = 4$; в) $n = -4$. **1183.** а) x больше y в 100 раз; б) x больше y в 100 000 раз; в) x меньше y в 100 раз; г) x меньше y в 1 000 000 раз. **1184.** а) $4{,}2 \cdot 10^8$ г; б) $6{,}3 \cdot 10^8$ г; в) $3{,}6 \cdot 10^{-5}$ кг; г) $1{,}28 \cdot 10^{-6}$ т; д) $2 \cdot 10^{-3}$ т; е) $4{,}2 \cdot 10^0$ ц. **1185.** а) $3{,}6 \cdot 10^3$ с; б) $8{,}64 \cdot 10^4$ с; в) $2{,}592 \cdot 10^6$ с; г) $3{,}1536 \cdot 10^7$ с. **1186.** а) $1{,}625 \cdot 10^8$; б) $3{,}6 \cdot 10^3$; в) $1{,}008 \cdot 10^{-7}$; г) $1{,}992 \cdot 10^{-3}$. **1187.** а) $1{,}980... \cdot 10^{-3}$; б) $9 \cdot 10^{-7}$. **1188.** На 6. **1192.** а) (2; 63); б) (14; $+\infty$). **1193.** а) [3; 6); б) $[4; 8) \cup (8; 9]$.

К дополнительным упражнениям. **1198.** а) 5^{-n}; б) 5^n; в) 5^{-3n}. **1199.** а) $\frac{1}{4}$; б) 4; в) 25; г) 5. **1202.** а) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$; б) $\frac{1}{y+1}$; в) $\frac{1}{(a-b)^2}$; г) $\frac{b-a}{ab}$. **1203.** 1,45. **1204.** а) 5^n; б) 2^n; в) $\frac{1}{3^n}$; г) 7^{2n}; д) a^{2n}; е) b^{4n}. **1208.** $\frac{1}{ab}$. **1209.** $\frac{a^3}{2(a-1)}$. **1210.** а) $a^{-4}b^{-1}$; б) $\frac{b^2-bc+c^2}{bc}$. **1211.** а) В $4{,}04 \cdot 10^5$ раз; б) в $3{,}31 \cdot 10^5$ раз; в) в $3{,}05 \cdot 10^6$ раз; г) в $2{,}67 \cdot 10^5$ раз. **1212.** а) $7{,}84 \cdot 10^3$; б) $1{,}2 \cdot 10^3$; в) $6{,}28 \cdot 10^4$; г) $6{,}69 \cdot 10^6$. **1213.** а) 14; б) 8; в) 20; г) 7. **1214.** а) 33 или 34; б) 6 или 7.

Глава 7

К параграфу 16. **1218.** в) -2, 0, 2; г) нулей функции нет; д) 2, 0,5; е) ± 1. **1219.** в) -3; -1; г) 1; 3. **1220.** в) $(-\infty; 0)$; г) $(0; +\infty)$; д) $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$; е) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. **1221.** а) $f(x) = 0$ при $x = 0{,}2$, $f(x) < 0$ при $x \in [-2; 0{,}2)$, $f(x) > 0$ при $x \in (0{,}2; 2]$, $E(f) = [-11; 9]$; б) $f(x) = 0$ при $x = \frac{2}{3}$, $f(x) < 0$ при $x \in \left(\frac{2}{3}; 7\right]$, $f(x) > 0$ при $x \in \left[-4; \frac{2}{3}\right)$; $E(f) = [-19; 14]$; в) $f(x) = 0$ при $x = \frac{1}{2}$, $f(x) < 0$ при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, $f(x) > 0$ при $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; $E(f) = (-\infty; +\infty)$; г) $f(x) = 0$ при $x = 0$, $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E = [0; +\infty)$. **1222.** а) $a = 2{,}5$; б) $a = 6{,}5$. **1223.** а) $D(g) = [-7; 7]$, $E(g) = [-2; 2]$; б) $D(f) = [-6; 8]$, $E(f) = [-4; 4]$. **1224.** $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (-2; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$. **1226.** а) $x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$; б) $y \in \{y|\ y \in \boldsymbol{Z}, -9 \leqslant y \leqslant -1\}$. **1227.** а) У к а з а н и е. $36^{11} + 1$ представьте в виде произведения. **1228.** а) 3; б) $\frac{1}{27}$. **1233.** а) 1; б) 4; в) 2; г) 1. **1236.** а) $[4; +\infty)$; б) $\varnothing$. **1237.** а) $686a^{3-2m}$; б) $\frac{1}{4}b^{9m}$. **1250.** а) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$; б) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; в) $x = 2$. **1251.** а) 3; б) 2; в) 1; г) 0; д) -2; е) $-\sqrt{5}$. **1252.** а) $(-\infty; 1)$; б) $[2; +\infty)$; в) $(3; +\infty)$. **1253.** а) При $n = -1$; б) при $n = -4$; в) при $n = -25$. **1254.** а) При $m = -1$ и $m = 1$; б) при $m = -2$ и $m = 2$; в) при $m = -3$ и $m = 3$. **1255.** При a, равном 0, 1, 4, 9, уравнение имеет целые корни, т. е. целыми корнями уравнения при $a < 10$ являются числа -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6. **1256.** $\frac{7}{30}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{13}{30}$, $\frac{17}{30}$, $\frac{19}{30}$. **1257.** $\frac{x+2y}{2}$. **1258.** а) -11 и -10; б) -6 и -5.

К параграфу 17. **1259.** б) $x = 100$, $x = 2{,}5$, $x = 0{,}125$, $x = 0{,}05$; в) $x \in (10; +\infty)$, $x \in (100; +\infty)$, $x \in (1000; +\infty)$, $x \in (0; 0{,}05)$, $x \in (0; 0{,}01)$. **1262.** а) При $x = 1$; при $x > 1$; при $0 < x < 1$; б) при $x = -1$; при $-1 < x < 0$;

при $x < -1$. **1284.** $y = \frac{5}{x}$. **1292.** а) $D(f) = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; -2) \cup \cup (2; +\infty)$; б) $D(f) = (-\infty; -6) \cup (-6; +\infty)$, $E(f) = (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$. **1293.** а) $x = 7$, $y = -4$; б) $x = -8$, $y = 5$; в) $x = 4$, $y = 9$; г) $x = -6$, $y = -10$; д) $x = -2$, $y = \frac{1}{3}$; е) $x = \frac{1}{8}$; $y = \frac{1}{4}$. **1298.** а) -1; 0; 3; б) -2; -1. **1299.** $(-6; 7)$, $(0; 1)$, $(2; 15)$, $(8; 9)$. **1302.** а) $a^2 - b^2$; б) $x^2 - y^2$. **1304.** а) $D(f) = (-\infty; -3) \cup \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$; $E(f) = [9; 18) \cup (18; +\infty)$; б) $D(f) = (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; -10) \cup (-10; +\infty)$.

К дополнительным упражнениям. **1307.** $E(g) = \{-6; -4; 0; 6\}$. **1308.** а) При $x = 1{,}5$; б) при $x = -0{,}2$; в) при $x = 2\frac{5}{6}$; г) при $x = -8{,}5$. **1309.** а) $D(f) = [-6; 5]$; б) $f(-5) = -1$, $f(1) = 1$, $f(4) = 4$; в) $E(f) = [-2; 5]$; г) $f(x) = 0$ при $x = -4$, $f(x) = 2$ при $x = -2$ и $x = 0$, и $x = 2$, $f(x) = 3$ при $x = -1$ и при $x = 3$, $f(x) = 4$ при $x = 4$. **1310.** а) $D(g) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $g(-4) = -1$, $g(-1) = \frac{1}{2}$; $g(2) = 0$, $g(4) = 1$; в) $E(g) = (-\infty; +\infty)$; г) $g(x) = -6$ при $x = -14$, $g(x) = 0$ при $x = -2$ и при $x = 2$, $g(x) = 1$ при $x = 4$, $g(x) = 6$ при $x = 14$. **1315.** а) $y = |x - 8|$; б) $y = |x - 1| + 7$; в) $y = |x| - 5$; г) $y = |x + 3| - 2$. Указание. Постройте график функции, заданной двумя выражениями, а затем подберите соответствующую формулу. **1316.** а) $a = -1$ или $a = 7$; б) $a = -4$ или $a = -2$. **1317.** $m = 10$, $n = 12$ или $m = 2$, $n = 12$. **1319.** а) $k = 6$, $b = -9$; б) $k = -18$, $b = -48$. **1320.** $(3; 3)$. **1335.** а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) $n = -1$; г) $n = -4$; д) $n = 4$; е) $n = -5$. **1339.** $(-3; 8)$, $(3; 2)$, $(5; 16)$, $(11; 10)$. **1340.** Это точка с координатами $x = 3$, $y = 1$. **1342.** $(4; 1)$ и $(1; 4)$.

Задачи повышенной трудности

1343. б) $\frac{y+1}{y^2+y-2}$; в) $\frac{a^2+a+1}{a^3+1}$; г) $b^4 - b^2 + 1$. **1344.** а) $\frac{a-b-c}{a-b+c}$; б) $a + b + c$. Указание. Воспользуйтесь тождествами: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$ и $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)$; в) $\frac{n}{(x+1)(x+n+1)}$; г) $\frac{(a+b)^2}{a^3b^3}$; д) $\frac{x-y}{xy}$; е) x. **1345.** 9801. **1346.** Указание. Рассмотрите случаи, когда $n = 3k$, $n = 3k - 1$, $n = 3k + 1$. **1347.** 11, 12, 15. **1349.** Указание. Представьте каждую дробь-слагаемое в виде разности $\frac{1}{a_1+a_2+...+a_{k-1}} - \frac{1}{a_1+a_2+...+a_k}$, где $k = 1, 2, ..., n$. **1350.** Указание. Воспользуйтесь неравенством $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$. Имеем: $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$, $ab + bc + ca = \left(\sqrt{ab}\right)^2 + \left(\sqrt{bc}\right)^2 + \left(\sqrt{ca}\right)^2$, $\left(\sqrt{ab}\right)^2 + \left(\sqrt{bc}\right)^2 + \left(\sqrt{ca}\right)^2 \geqslant \sqrt{ab \cdot bc} + \sqrt{bc \cdot ca} + \sqrt{ca \cdot ab}$, $\sqrt{ab^2c} + \sqrt{abc^2} + \sqrt{a^2bc} = \sqrt{abc}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)$. Отсюда (по транзитивности): $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \sqrt{abc}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)$. **1351.** Указание. Воспользовавшись неравенством $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, составьте $n - 1$ неравенство: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, ..., $\frac{1}{(n-1)^2} < \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}$, $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Сложив эти неравенства почленно, получим $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} < 2$. **1352.** $x = 6$, $x = 3$. **1355.** Данное выражение после замены и упрощения примет вид: $\frac{|a^2-1| + (a^2-1)}{2a} = \begin{cases} a - 1, \text{ если } a \geqslant 1, \\ \frac{1-a}{a}, \text{ если } 0 < a < 1. \end{cases}$ **1356.** $a + b$. **1357.** а) $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$; б) $\sqrt{5} + \sqrt{2} - 1$. **1358.** а) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} > \sqrt{1{,}05}$; б) $\sqrt{9 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}} > \sqrt{9 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{15}}$. **1359.** Указание. Пусть $\sqrt{x} = a$, $\sqrt{y} = b$. Тогда выражение примет вид: $\sqrt{\frac{a^4 + 2a^2b^2 + 9b^4}{a^2 - 2ab + 3b^2} - 2b^2} = \sqrt{\frac{\left(a^2 + 3b^2\right)^2 - 4a^2b^2}{a^2 - 2ab + 3b^2} - 2b^2} = \sqrt{a^2 + 3b^2 + 2ab - 2b^2} = \sqrt{(a+b)^2} = a + b = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. **1360.** Указание. Перемножьте сначала 3-й и 4-й радикалы, затем результат умножьте на 2-й радикал и, наконец, произведение умножьте на 1-й радикал. **1361.** а) 1; 2; $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Указание. Воспользуйтесь подстановкой $x^2 - 3x = y$; б) −1; 7; в) 2; 6; $4-\sqrt{6}$; $4+\sqrt{6}$; г) −4; 1. **1362.** Указание. Допустим, что оба уравнения $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ не имеют корней. Тогда $p^2 - 4q < 0$ и $p_1^2 - 4q_1 < 0$. Сложив эти неравенства почленно, получим: $p^2 + p_1^2 - 4q - 4q_1 < 0$. Используя условие, что

$pp_1 = 2(q + q_1)$, получим: $p^2 + p_1^2 - 2pp_1 < 0$, т. е. что $(p - p_1)^2 < 0$. Пришли к противоречию. Следовательно, сделанное предположение, что ни одно из уравнений не имеет корней, неверно. Значит, хотя бы одно из уравнений имеет корни. **1363.** При $a = 1$. **1364.** $a = -2{,}5$ и $a = 1{,}5$. При $a = -2{,}5$ $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{25}{4}$; при $a = 1{,}5$ $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{9}{4}$. **1365.** $m = 1$ и $m = -\frac{7}{8}$. Указание. Пусть x_1 — общий корень данных уравнений. Тогда верны равенства $x_1^2 - (2m + 1)x_1 + m + 1 = 0$ и $2x_1^2 - (4m - 1)x_1 + 1 = 0$. Умножив первое равенство на -2 и сложив его со вторым равенством, найдём, что $x_1 = \frac{2m+1}{3}$. Подставив значение x_1, например, в первое уравнение и решив его относительно m, найдём, что $m_1 = 1$, $m_2 = -\frac{7}{8}$. Соответствующие этим значениям параметров общие корни уравнений равны $x_1 = 1$ или $x_1 = -\frac{1}{4}$. **1366.** а) -6; 2; б) уравнение имеет бесконечное множество корней; корнем уравнения является любое число, принадлежащее промежутку $[-1; 1]$. **1367.** Система имеет единственное решение $x = \frac{6}{k+2}$, $y = \frac{3}{k+2}$, если $k \neq -2$ и $k \neq 2$. Условие, что $x > 1$ и $y > 0$, выполняется при $k \in (-2; 2) \cup (2; 4)$. При $k = 2$ система имеет бесконечное множество решений, которое с учётом условия, что $x > 1$ и $y > 0$, можно записать так: $\{(x; y) \mid 1 < x < 3,\ 0 < y < 1\}$. **1368.** Точка дуги AB параболы, наиболее удалённая от прямой $y = x + 2$, имеет координаты $x = 2$, $y = 0$. Указание. Надо найти прямую, параллельную прямой $y = x + 2$ и касающуюся параболы $y = x^2 - 3x + 2$. Она имеет вид $y = x + b$. Уравнение $x^2 - 3x + 2 = x + b$ имеет единственное решение, если $D = 0$ (в этом случае прямая и парабола имеют единственную точку). Отсюда $b = -2$. Искомое расстояние равно ширине полосы, образованной прямыми $y = x + 2$ и $y = x - 2$ (рис. 78). **1369.** а) $x_1 = -\sqrt{10}$, $x_2 = \sqrt{10}$; б) $x_1 = -2\sqrt{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2\sqrt{2}$; в) $x_1 = -\sqrt{6}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = \sqrt{6}$; г) $x_1 = -2$; $x_2 = 2$. **1370.** Указание. Представьте выражение $7^{2n} - y^{2n} - 297$ в виде $(49^n - 16^n) + (-33 - 264)$. Затем выполните преобразования: $(49^n - 16^n) = (49 - 16) \cdot A$, где $A = 49^{n-1} + 49^{n-2} \times 16 + \ldots + 16^{n-1}$; $49^n - 16^n - 33 - 264 = (33A - 33) - 264 = 33(A - 1) - 264$. Далее докажите, что $A - 1$ кратно 8. **1372.** б) Указание. Воспользуйтесь неравенством $\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$, составив n неравенств: $\frac{1}{\sqrt{1}} < \sqrt{2} - \sqrt{0}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{3} - \sqrt{1}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} < \sqrt{4} - \sqrt{2}$, ..., $\frac{1}{\sqrt{n-2}} <$

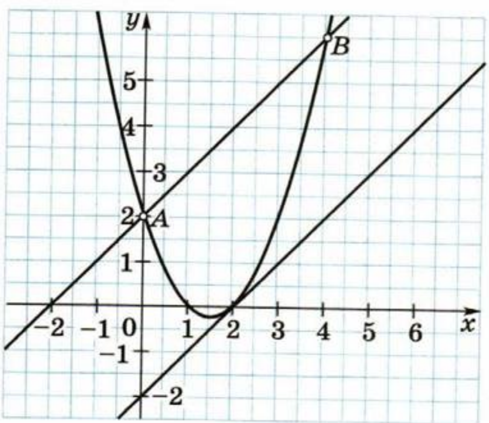


Рис. 78

$< \sqrt{n-1} - \sqrt{n-3}$, $\frac{1}{\sqrt{n-1}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$. Почленно сложив их, получим: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1$. Указание. Если a и b разных знаков или одно из них равно нулю, то a или b по модулю больше или равно 1. Тогда неравенство $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$ очевидно. Остаётся случай, когда $a > 0$ и $b > 0$. Учитывая это, воспользуемся неравенством $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ или $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Отсюда $ab \leqslant \frac{1}{4}$. Выполним преобразование (учитывая, что $a + b = 1$): $a^4 + b^4 = (a+b)^4 - 4ab^3 - 4a^3b - 6a^2b^2 = 1 - 4ab(a^2 + b^2) - 6a^2b^2 = 1 - 4ab((a+b)^2 - 2ab) - 6a^2b^2 = 1 - 4ab(1 - 2ab) - 6a^2b^2 = 1 - 4ab + 2a^2b^2 = 1 + 2(a^2b^2 - 2ab + 1) - 2 = 2(ab - 1)^2 - 1$. Так как $-ab \geqslant -\frac{1}{4}$, $1 - ab \geqslant \frac{3}{4}$, $(1 - ab)^2 \geqslant \frac{9}{16}$, $2(1 - ab)^2 - 1 \geqslant \frac{9}{8} - 1$, т. е. $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$. Значит, $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$. **1376.** $f(0) = 1$; $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$. **1377.** $g(0) = 0$; $g(-x) = -g(x)$; $g(x) = kx$. **1378.** За 3 ч, 6 ч, 5 ч. **1379.** 30 км. **1380.** 70 кг и 140 кг. **1381.** а) $\frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$; б) $\frac{3v_1v_2}{2v_1 + v_2}$. **1382.** 248. **1383.** 8281.

Предметный указатель

Оглавление

Учебное издание

Макарычев Юрий Николаевич
Миндюк Нора Григорьевна
Нешков Константин Иванович
Феоктистов Илья Евгеньевич

АЛГЕБРА

8 класс

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
для общеобразовательных организаций

Углублённый уровень

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *И. В. Рекман*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художник *А. Г. Бушин*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Фотографии из фотобанка *«Diomedia»*
Компьютерная графика *И. В. Губиной*
Компьютерная вёрстка и техническое редактирование *Е. М. Завалей*
Корректор *Т. И. Лошкарёва*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000.
Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 15.06.17. Формат $70\times90^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура NewtonCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 17,68.
Доп. тираж 1000 экз. Заказ № 1785.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд»
в филиале «Тверской полиграфический комбинат детской литературы»
ОАО «Издательство «Высшая школа».
170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46.
Тел.: +7(4822) 44-85-98. Факс: +7(4822) 44-61-51.